EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

MECHATRONIKA PRŮMYSLOVÝCH ROBOTŮ

učební text

Vladimír Mostýn, Václav Krys

Ostrava 2012

Recenze: doc. Ing. Zdeněk Konečný, Ph.D.
RNDr. Miroslav Liška, CSc.

Název: Mechatronika průmyslových robotů
Autor: Vladimír Mostýn, Václav Krys
Vydání: první, 2010
Počet stran: 201
Náklad: pouze elektronický učební text

Studijní materiály pro studijní obor 2301T013 Robotika
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Vzděláváním pro konkurenceschopnost
Název: Personalizace výuky prostřednictvím e-learningu
Číslo: CZ.1.07/2.2.00/07.0339
Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava
Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

ISBN 978-80-248-2610-3

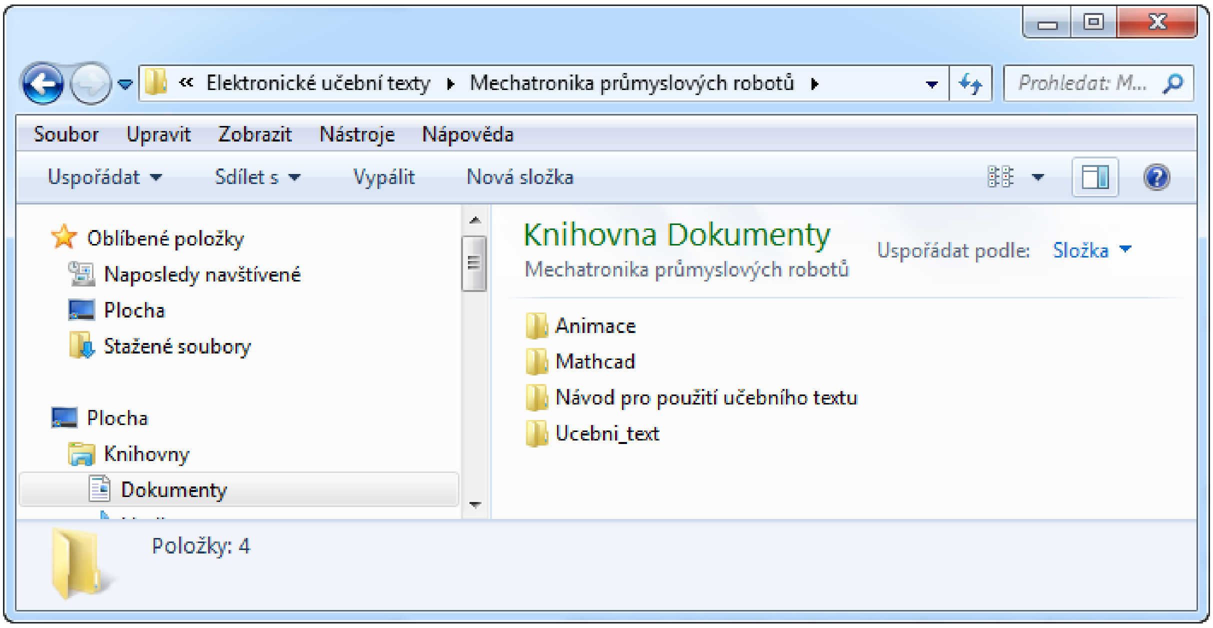
POKYNY KE STUDIU

Mechatronika průmyslových robotů

Pro předmět Mechatronika v 1. semestru navazujícího studia oboru Robotika jste obdrželi studijní balík na CD-ROM obsahující:

- učební text „Mechatronika průmyslových robotů"
- sadu referenčních příkladů v prostředí Mathcad
- sadu instruktážních animací k řešeným příkladům a učebnímu textu

Učební text je doplněn řadou komentovaných animací a řešených příkladů v prostředí Mathcad, které jsou spouštěny pomocí hypertextového odkazu přímo z učebního textu. Pro zachování správné funkčnosti hypertextových odkazů animací a řešených příkladů je nutno při vytváření kopie učebního textu dodržet originální datovou strukturu učebního textu dle obrázku a názvy jednotlivých adresářů:



Nadřízená adresářová struktura i název adresáře, ve kterém jsou vlastní zdrojové adresáře Animace, Mathcad a Ucebni_text jsou nepodstatné.

Prerekvizity

Pro studium tohoto předmětu se předpokládá absolvování bakalářského studia na Fakultě strojní. Vzhledem k tomu, že použitý software je pouze v anglické verzi, je nezbytné, aby student znal aspoň základy technické angličtiny a byl schopen zvládnout základní pojmový aparát.

Cíl předmětu

Cílem výklady je seznámení posluchačů s metodami výpočtů a s aplikací numerických výpočetních metod v oblasti kinematiky a dynamiky průmyslových robotů a manipulátorů a jejich řízení.

Výklad metod modelování kinematiky a dynamiky je proveden pro typické mechanismy robotů a manipulátorů s více stupni volnosti a více pohony, pro které pracovní pohyb koncového členu vzniká složením aktivních pohybů jednotlivých článků. Pro tyto mechanismy jsou typické velké a rychlé změny hmotnostních parametrů (momenty setrvačnosti), které znesnadňují návrh subsystémů řízení a omezují použití adaptivních algoritmů. Z těchto důvodů je pozornost věnována také vyjádření dynamických vlastností mechanického subsystému ve formě vhodné pro syntézu regulátorů polohy a rychlosti. V současné době se převážně používají pro polohové řízení průmyslových robotů dvě základní koncepce řízení – řízení kinematické a řízení momentové (dynamické). Kinematické řízení je založeno na řešení inverzní úlohy kinematiky (výpočet žádané polohy jednotlivých pohybových vazeb při známé žádané poloze koncového bodu efektoru a jeho orientaci), kdy polohové zpětnovazební řízení je realizováno pouze na úrovni kinematických veličin pohonů. Tento způsob řízení nebere v úvahu vliv setrvačných hmot ramen robotů a manipulátorů a předmětu manipulace, což při dnešních vysokých požadavcích na dynamiku pohybu – velká zrychlení, vysoké manipulované hmotnosti nepřináší požadovanou kvalitu řízení. Řízení momentové je založeno na více či méně složitém matematickém modelu dynamiky mechanismu a doplňuje výpočet žádaných poloh jednotlivých pohybových os výpočtem požadovaných momentů, které musí jednotlivé pohony během pohybu a zrychlování vyvinout. Tento způsob řízení je dnes u průmyslových robotů používán převážně. Skriptum si klade za cíl připravit absolventy strojních oborů právě na tuto část syntézy řídicích systémů.
Pozornost je věnována otevřeným kinematickým strukturám průmyslových robotů a matematické modely se dotýkají pouze prostorových soustav tuhých těles, tj. není zde uvažováno s pružností článků ani jejich vazeb. Závěry a postupy modelování lze většinou zevšeobecnit a bez problémů použít na jednodušší mechanismy.
Při výběru výpočetních metod je kladen důraz zejména na jejich snadnou algoritmizovatelnost pro případ jejich použití v rámci výpočetního programu. Jednotlivé výpočetní metody jsou založeny na maticovém počtu, resp. vektorové algebře, pro jejich praktickou realizaci je nutno použít vhodný výpočetní nástroj. Pro příklady v této publikaci byl použit matematický software Mathcad a Matlab.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do Navazujícího magisterského studia oboru Robotika, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru Fakulty strojní. Skriptum je určeno pro konstruktéry, výpočtáře a vědecké pracovníky v oblasti složitých prostorových mechanismů, jakými roboty a manipulátory bezesporu jsou, a nabízí snadno aplikovatelné výpočetní metody, použitelné jak pro konstruktéra mechanického subsystému – výpočet reakcí v pohybových jednotkách pro dimenzování článků, pohonů a převodů, tak pro oblast řízení – model kinematiky mechanismu a model řízeného dynamického subsystému pro moderní „momentové“ řízení.
Studijní opora se dělí na tématické bloky, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:

Čas ke studiu: xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden čas potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají jisté zkušenosti.

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

popsat ...
definovat ...
vyřešit ...

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.

Výklad

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky a tabulkami.

Referenční postup v CAD systému, referenční výpočet v prostředí Mathcad

Výklad je doplněn řešenými příklady a ukázkami výpočtů z probírané problermatiky.

Shrnutí pojmů

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.

Otázky

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

Animovaný postup - odkaz

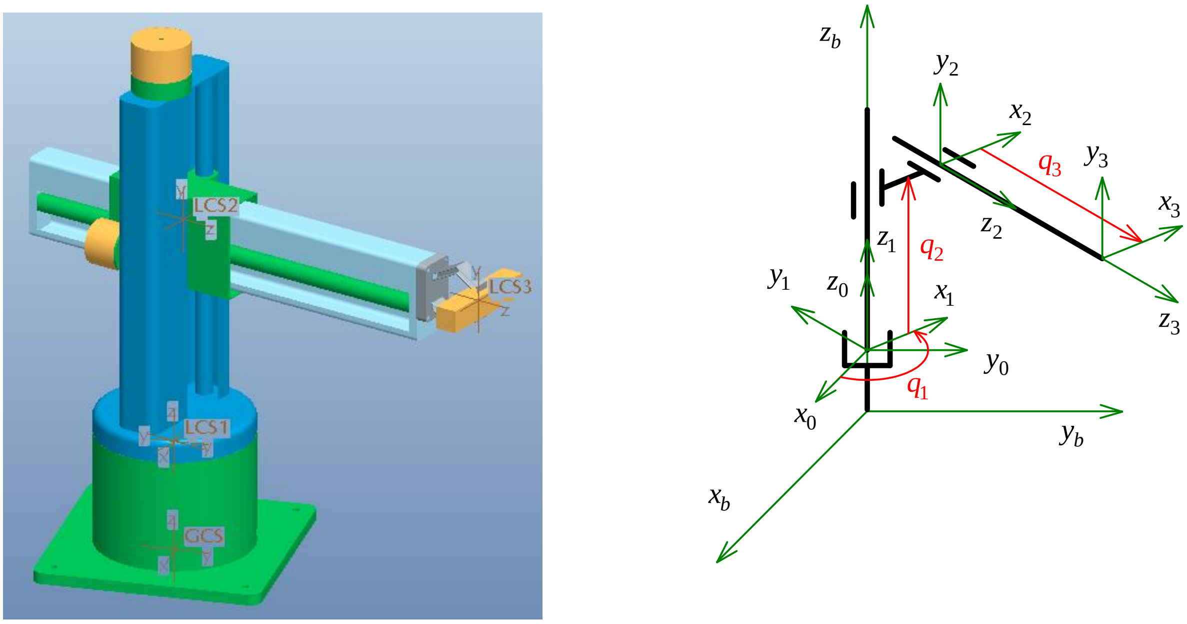
Některé kapitoly jsou doplněny animovaným postupem řešení problému.
Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přejí autoři výukového materiálu

Vladimír Mostýn a Václav Krys

OBSAH

1 ÚVOD

Důležitou součástí analýzy robotů je úplný kinematický model mechanického systému, který poskytuje všechny potřebné kinematické veličiny jak pro dynamický model mechanického systému (silové působení, zatěžování článků, dimenzování), tak pro potřeby řízení (syntéza regulátorů polohy a rychlosti). Jedná se zejména o průběh polohy a orientace koncového pracovního bodu v čase a tomu odpovídající průběh polohy jednotlivých článků mechanismu. Vzájemná poloha článků je obecně popsána tzv. zobecněnými souřadnicemi (v robotice je často používán pojem kloubové proměnné – *joint variables*), které udávají vzájemné natočení v případě rotační kinematické vazby mezi sousedními články, či posunutí v případě posuvné (translační) vazby. Proto je zaveden pojem „zobecněná“ souřadnice, která reprezentuje úhel, popř. vzdálenost podle toho, jestli vazba je rotační nebo translační. Na Obr. 1-1 je znázorněn průmyslový robot se třemi stupni volnosti, jehož zobecněné souřadnice q_1 až q_3 udávají natočení a vysunutí jednotlivých článků, koncový pracovní bod je v tomto případě specifikován na hrotu technologické hlavice. Na obrázku zjednodušené kinematické struktury robotu jsou pevnému podstavci, jednotlivým článkům i technologické hlavici přiřazeny tzv. lokální souřadné systémy a zobecněné souřadnice jsou v dalších kapitolách definovány jako úhly, popř. vzdálenosti mezi příslušnými osami těchto lokálních souřadných systémů.



Obr. 1-1

1.1 Zavedení pojmů a konvence značení

V kinematice mechanismů je s výhodou místo klasického vektorového počtu využíván maticový počet. Z tohoto důvodu jsou vektory a operace s nimi (součet, skalární a vektorový součin) vyjádřeny jako matice, popř. maticové operace. Vektory jsou vyjádřeny jako sloupcová matice a označeny malým písmenem tučně, složky jsou označeny malým písmenem kurzívou s příslušným indexem. Vektor **p** je tedy vyjádřen jako sloupcová matice

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}^T \qquad (1\text{-}1)$$

Matice jsou označeny velkým písmenem tučně, jejich složky malým písmenem kurzívou s příslušnými indexy. Skalární součin vektorů **a** a **b**, jehož výsledkem je skalár *c*, se vypočte jako součin transponované matice vektoru **a** a matice vektoru **b**

$$c = \mathbf{a}^T . \mathbf{b} \tag{1-2}$$

Pro realizaci vektorového součinu je zavedena polosouměrná (antisymetrická) matice vektoru, která je označena $\hat{\mathbf{a}}$ a je ve tvaru

$$\hat{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

Vektorový součin vektorů **a** a **b**, jehož výsledkem je vektor **c** kolmý na rovinu danou vektory **a** a **b** je pak vyjádřen jako součin antisymetrické matice vektoru **a** a matice vektoru **b**

$$\mathbf{c} = \hat{\mathbf{a}} . \mathbf{b} \tag{1-4}$$

Kromě klasických ortogonálních (třírozměrných) souřadnic je v kinematice mechanismů s výhodou využíváno tzv. homogenních souřadnic, které jsou čtyřrozměrné. Čtvrtá souřadnice je zavedena z formálních důvodů a pro souřadnice bodu má vždy velikost 1, pro souřadnice vektoru je 0. První tři souřadnice jsou stejné jako souřadnice ortogonální. Souřadnice bodu **P** a vektoru **a** jsou tedy vyjádřeny jako sloupcové matice

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \\ 0 \end{bmatrix} \tag{1-5}$$

Vzájemnou polohu jednotlivých článků mechanismu je možné popsat různými způsoby, u rotační dvojice např. úhlem sevřeným těmito články, u posuvné kinematické dvojice vzdáleností středu posuvné jednotky od jednoho kraje jednotky, po které se posouvá apod. V kinematice mechanismů s pohyblivými články je z praktického hlediska nejvýhodnější popisovat jejich vzájemnou polohu pomocí soustavy tzv. lokálních souřadných systémů (LCS – Local Coordinate System), které jsou těmto článkům pevně přiřazeny (tj. pohybují se současně s článkem) a jejichž polohu a orientaci vůči základnímu (globálnímu) souřadnému systému (*GCS* – Global Coordinate Systém) je možno snadno určit. Lokální souřadné systémy budou v dalším textu i v příkladech v CAD systému Pro/Engineer označovány příslušným indexem, např. LCS_2, resp. *LCS2*. Jednotlivé zobecněné souřadnice pak jsou definovány na základě těchto lokálních souřadných systémů jako orientované vzdálenosti či úhly mezi příslušnými osami lokálních systémů. Proměnnou, udávající velikost rotace nebo translace *i*-tého článku, obecně nazýváme zobecněnou souřadnicí q_i (kloubová proměnná, joint variable) a jednotlivé zobecněné souřadnice pro všechny pohybové jednotky mechanismu s *n* stupni volnosti tvoří vektor zobecněné souřadnice

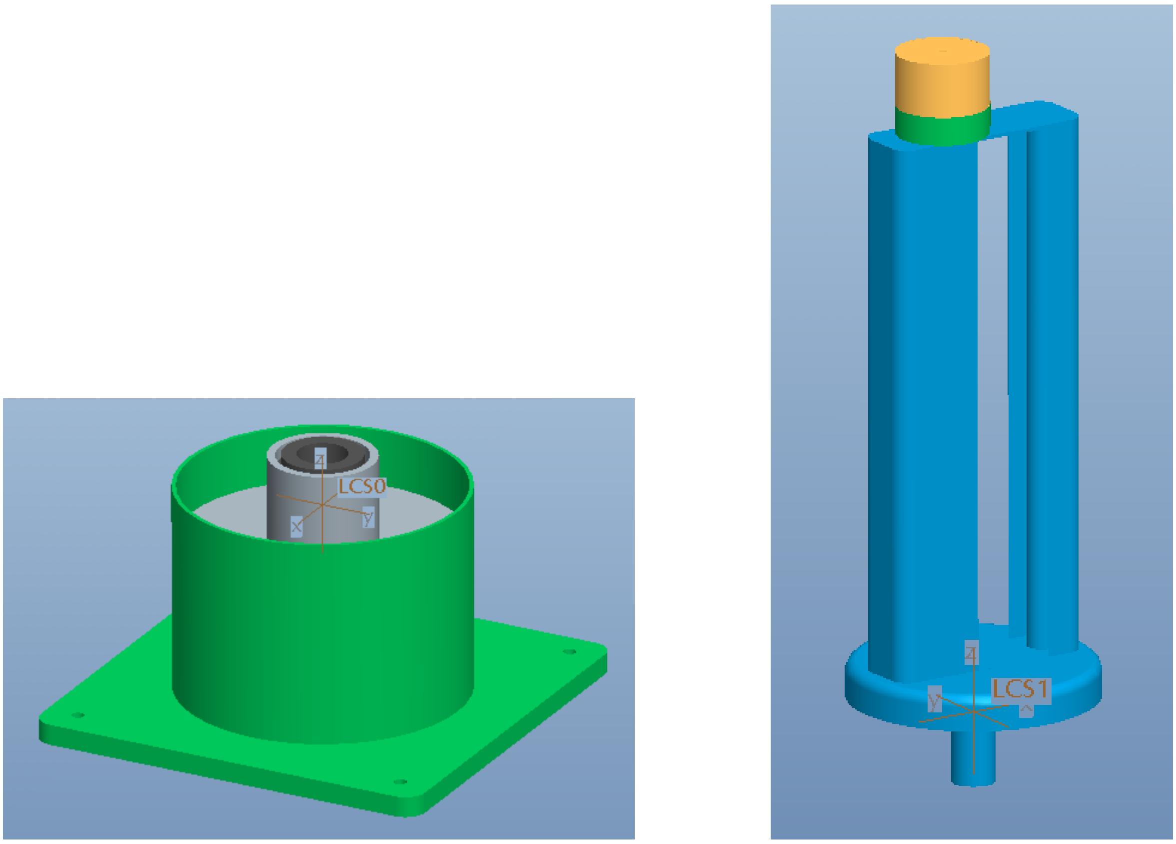
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix}^T \tag{1-6}$$

Pro určení polohy pracovního článku mechanismu, respektive nástroje je nutné znát nejen polohu koncového bodu nástroje, danou souřadnicemi $p_x,\ p_y,\ p_z$ v základním souřadném systému GCS, ale také jeho orientaci v prostoru danou třemi úhly vůči osám základního souřadného systému[1]. Pro určení orientace nástroje je zaveden tzv. přibližovací vektor **o**, který leží v ose posledního článku, resp. nástroje. Poloha a orientace nástroje je pak dána spojeným vektorem polohy **p** a orientace **o** nástroje – tzv. komplexním (rozšířeným) vektorem polohy **w** (Tool Configuration Vector), který má šest souřadnic a je definován

$$\mathbf{w} = \mathbf{p} \quad \mathbf{o}^{T} = \begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z & o_x & o_y & o_z \end{bmatrix}^{T} \qquad (1\text{-}7)$$

Příklad 1-1 Použití lokálních souřadných systémů

Použití lokálních souřadných systémů je ukázáno na modelu manipulátoru se třemi stupni volnosti dle Obr. 1-1. Globální (základní, vztažný) souřadný systém GCS je definován osami x_b, y_b a z_b. Lokální souřadný systém LCS_0 se svými osami x_0, y_0 a z_0 přísluší základu zařízení a definuje jeho rozměr, stejně jako lokální souřadný systém LCS_1 je pevně spojen se sestavou prvního rotačního článku - Obr. 1-2.

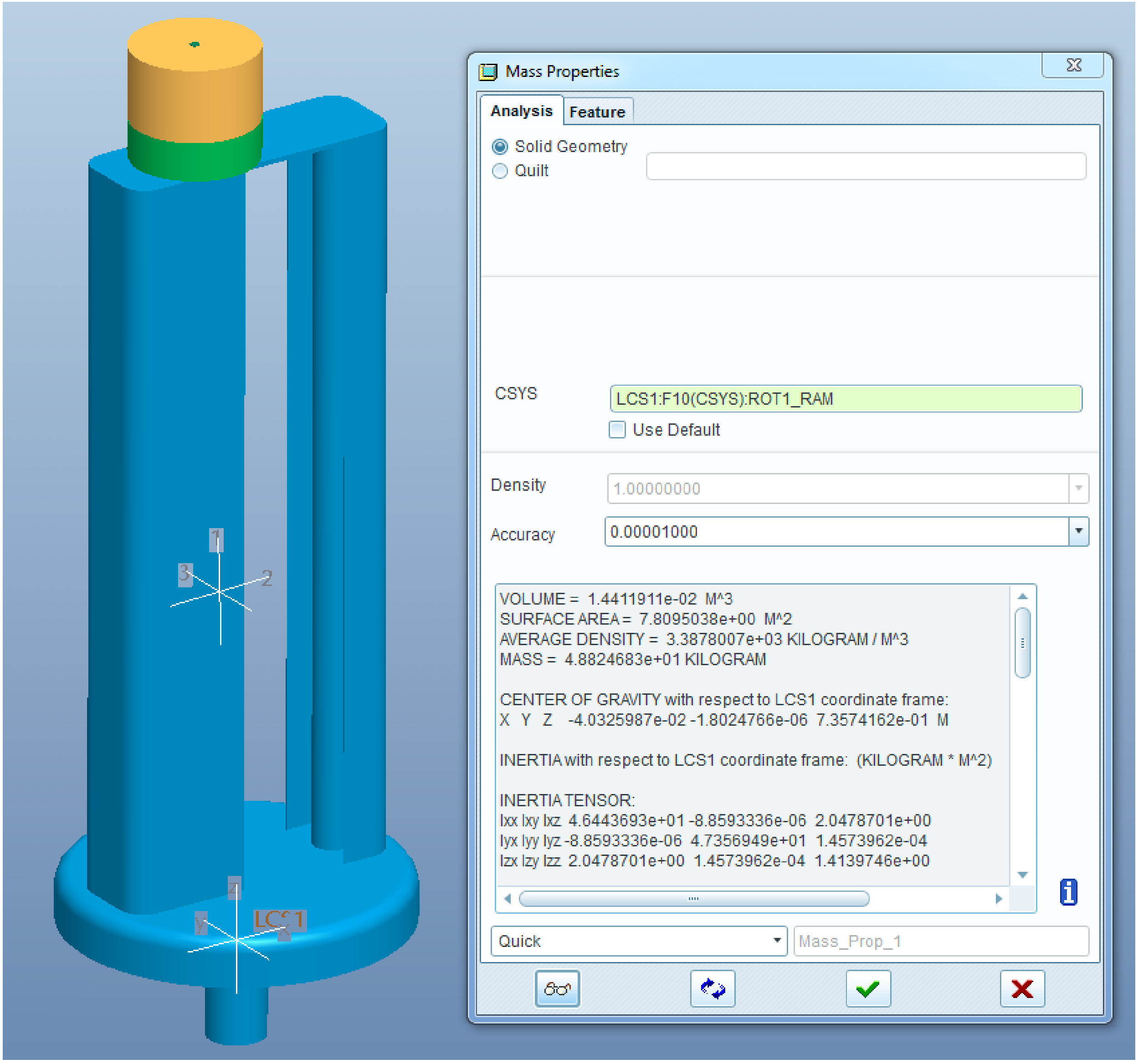


Obr. 1-2 Pevný základ manipulátoru a první rotační článek a jejich lokální souřadné systémy

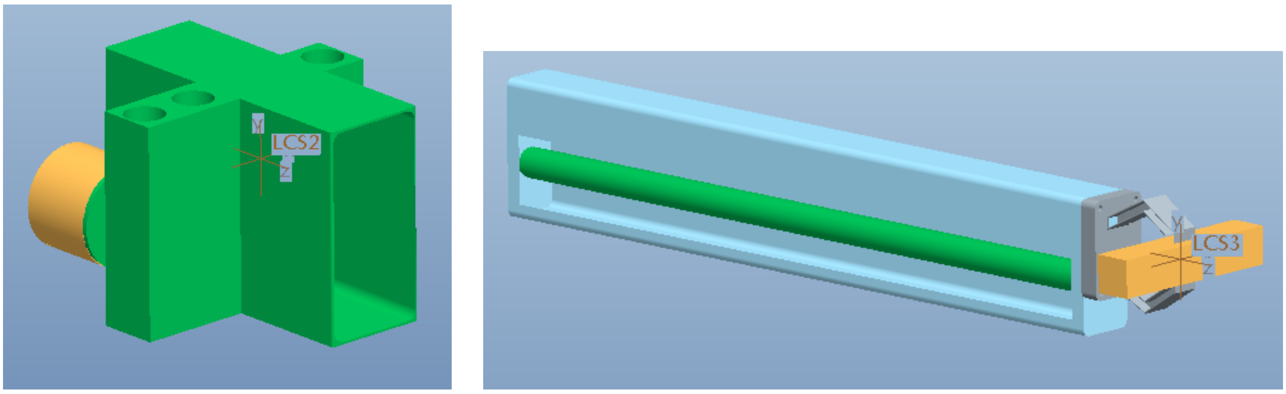
Na Obr. 1-3 je např. ukázáno určení polohy těžiště prvního článku vůči lokálnímu souřadnému systému LCS_1 a určení dalších hmotnostních paramentrů – např. matice setrvačnosti definované vůči lokálnímu souřadnému systému pomocí systému Pro/Engineer. Na Obr. 1-4 jsou ukázány lokální souřadné systémy článku 2, článku 3 a technologické hlavice. Takto tedy na základě konstrukční dokumentace daného článku dokážeme určit polohu významných bodů, konců článků, energetických přívo-

[1] Kromě úhlů k osám souřadného systému je často používáno vyjádření orientace úhlem k rovině *xy* (elevace), k rovině *xz* a otočení kolem osy nástroje.

dů apod. v jeho lokálním souřadném systému. Články se ale pohybují a s nimi se pohybují i jejich lokální souřadné systémy. Např. poloha koncového bodu technologické hlavice, která je ve středu čelistí, je v lokálním souřadnému systému LCS_3 neměnná (je to počátek tohoto posledního lokálního souřadného systému), přibližovací vektor leží tedy v ose z posledního souřadného systému a je totožný s jednotkovým vektorem na ose z_3, tedy $\mathbf{o} = \mathbf{k}_3$. Prakticky je ale nutno přepočítat polohu koncového bodu a souřadnice přibližovacího vektoru (orientaci hlavice) do základního souřadného systému *GCS* pracoviště kvůli poloze vůči ostatním zařízením, popř. předmětu technologické operace. K tomu slouží systém transformačních vztahů pro přepočet souřadnic z lokálních souřadných systémů jednotlivých článků, popř. pracovní technologické hlavice do základního souřadného systému. Nalezení těchto transformačních vztahů je předmětem dalších kapitol. Také umístění a orientace lokálních souřadných systémů na jednotlivých článcích podléhá určitým pravidlům, která pak zjednodušují nalezení transformačních vztahů pro přepočet souřadnic z lokálních souřadných systémů do globálního souřadného systému pracoviště.



Obr. 1-3 Hmotnostní parametry článku 1 a poloha jeho těžiště v LCS_1



Obr. 1-4 Lokální souřadné systémy článku 2 a článku 3

2 PŘÍMÁ ÚLOHA KINEMATIKY

Čas ke studiu: 4 hodiny

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

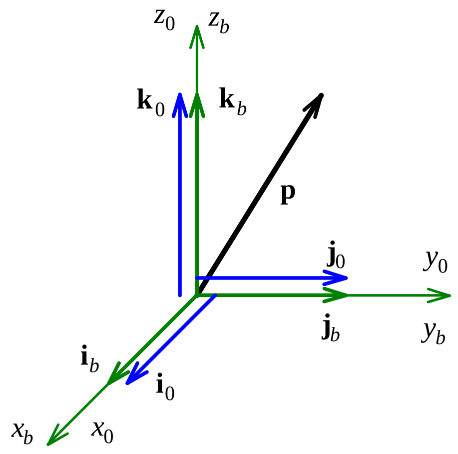
- definovat transformační matici pro vzájemné natočení a posunutí souřadných systémů,
- rozmístit lokální souřadné systémy po mechanismu tak, aby bylo možno automatizovaně sestavovat transformační matice,
- vypočítat polohu koncového (pracovního) bodu robotu a orientaci posledního článku, resp. nástroje při známých zobecněných souřadnicích – tedy řešit přímou úlohu kinematiky
- vypočítat rychlost koncového bodu robotu při známých rychlostech pohybu jednotlivých kloubů

Výklad

V kinematice prostorových mechanismů existují dvě základní úlohy. Úloha, kdy jsou známy jednotlivé zobecněné souřadnice a hledáme polohu a orientaci koncového bodu, je tzv. přímá úloha kinematiky. Tato úloha je snadno řešitelná pomocí goniometrických vztahů mezi jednotlivými články nebo pomocí lokálních souřadných systémů článků a transf ormačními maticemi pro přepočet souřadnic mezi nimi. Úloha opačná, kdy známe polohu a orientaci koncového bodu a hledáme jednotlivé zobecněné souřadnice, se nazývá inverzní úloha kinematiky a řešení této úlohy je obtížnější zejména pro kinematické struktury s více stupni volnosti.

2.1 Transformace souřadnic

Pro přepočet (transformaci) souřadnic mezi lokálními souřadnými systémy, které jsou spojeny s daným článkem, podstavcem, hlavicí apod. a globálním souřadným systémem, který je spojen s pracovním prostorem, je s výhodou využíváno maticového počtu. Odvození maticových vztahů pro přepočet souřadnic z jednoho souřadného systému do jiného je poměrně snadné a je ukázáno na příkladu dvou identických souřadných systémů x_b, y_b, z_b (GCS) a x_0, y_0, z_0 (LCS_0) na Obr. 2-1.



Obr. 2-1

Vektor $\mathbf{p}$ v součtovém tvaru je možno vyjádřit vůči souřadnému systému x_b, y_b, z_b ve tvaru

$$\mathbf{p} = p_{xb}.\mathbf{i}_b + p_{yb}.\mathbf{j}_b + p_{zb}.\mathbf{k}_b \tag{2-1}$$

a tentýž vektor vůči souřadnému systému x_0, y_0, z_0 ve tvaru

$$\mathbf{p} = p_{x0}.\mathbf{i}_0 + p_{y0}.\mathbf{j}_0 + p_{z0}.\mathbf{k}_0 \tag{2-2}$$

souřadnice vektoru $\mathbf{p}$ je možno také vyjádřit jako průměty vektoru $\mathbf{p}$ do směru jednotlivých jednotkových vektorů a tedy jako skalární součiny. Klasické vyjádření skalárního součinu je dle vztahu (2-3) vlevo, stejné vyjádření s využitím maticového počtu je ve vztahu vpravo

$$\begin{array}{ll} p_{xb} = \mathbf{i}_b.\mathbf{p} & p_{xb} = \mathbf{i}_b{}^T.\mathbf{p} \\ p_{yb} = \mathbf{j}_b.\mathbf{p} & p_{yb} = \mathbf{j}_b{}^T.\mathbf{p} \\ p_{zb} = \mathbf{k}_b.\mathbf{p} & p_{zb} = \mathbf{k}_b{}^T.\mathbf{p} \end{array} \tag{2-3}$$

Pro nalezení transformačního vztahu dosadíme do vztahů (2-3) vlevo pro souřadnice vektoru $\mathbf{p}$ vyjádřeného v souřadném systému x_b, y_b, z_b vektor $\mathbf{p}$, vyjádřený v souřadném systému x_0, y_0, z_0 vztahem (2-2) a roznásobíme. Dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{array}{l} p_{xb} = \mathbf{i}_b.\mathbf{p} = \mathbf{i}_b.p_{x0}.\mathbf{i}_0 + \mathbf{i}_b.p_{y0}.\mathbf{j}_0 + \mathbf{i}_b.p_{z0}.\mathbf{k}_0 \\ p_{yb} = \mathbf{j}_b.\mathbf{p} = \mathbf{j}_b.p_{x0}.\mathbf{i}_0 + \mathbf{j}_b.p_{y0}.\mathbf{j}_0 + \mathbf{j}_b.p_{z0}.\mathbf{k}_0 \\ p_{zb} = \mathbf{k}_b.\mathbf{p} = \mathbf{k}_b.p_{x0}.\mathbf{i}_0 + \mathbf{k}_b.p_{y0}.\mathbf{j}_0 + \mathbf{k}_b.p_{z0}.\mathbf{k}_0 \end{array} \tag{2-4}$$

kterou je možno vyjádřit maticově ve tvaru

$$\begin{bmatrix} p_{xb} \\ p_{yb} \\ p_{zb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}_b.\mathbf{i}_0 & \mathbf{i}_b.\mathbf{j}_0 & \mathbf{i}_b.\mathbf{k}_0 \\ \mathbf{j}_b.\mathbf{i}_0 & \mathbf{j}_b.\mathbf{j}_0 & \mathbf{j}_b.\mathbf{k}_0 \\ \mathbf{k}_b.\mathbf{i}_0 & \mathbf{k}_b.\mathbf{j}_0 & \mathbf{k}_b.\mathbf{k}_0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} p_{x0} \\ p_{y0} \\ p_{z0} \end{bmatrix} \tag{2-5}$$

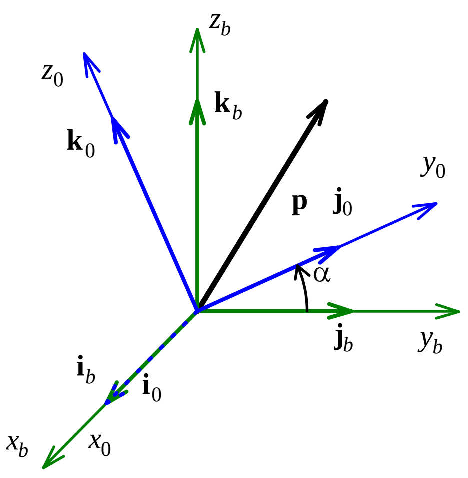
nebo symbolicky

$$\mathbf{p}_b = \mathbf{R}_{b0}.\mathbf{p}_0 \tag{2-6}$$

Maticový vztah (2-6) říká, že souřadnice vektoru $\mathbf{p}$ přepočteme ze souřadného systému x_0, y_0, z_0 do souřadného systému x_b, y_b, z_b tak, že je zleva vynásobíme transformační maticí $\mathbf{R}_{b0}$. Indexy transformační matice udávají, mezi kterými souřadnými systémy je přepočet prováděn. V dalším textu je index *b* často vynecháván, pokud u vektoru není index uveden, znamená to vždy, že je vyjádřen v základním souřadném systému. Pro výše uvedený případ identických souřadných systémů musí být tato matice jednotková, čemuž odpovídají skalární součiny jednotkových vektorů.

2.2 Rotace souřadných systémů

Na Obr. 2-2 je uveden případ, kdy je souřadný systém x_0, y_0, z_0 otočen vůči x_b, y_b, z_b kolem osy x_b o úhel α. Po dosazení do transformační matice ve vztahu (2-5) a uvážení, že skalární součin kolmých vektorů je nula, skalární součin totožných jednotkových vektorů je jedna a skalární součin různoběžných jednotkových vektorů je $\cos\alpha$ a při uvažování vzorce



Obr. 2-2

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp\sin\alpha \tag{2-7}$$

dostaneme transformační matici pro rotaci kolem osy *x* o úhel α ve tvaru

$$\mathbf{R}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{2-8}$$

Obdobně pro rotaci kolem osy *y* o úhel φ a kolem osy *z* o úhel ϑ dostaneme transformační matice ve tvaru

$$\mathbf{R}_{y,\varphi} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \tag{2-9}$$

$$\mathbf{R}_{z,\vartheta} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-10}$$

Uvedené tři základní transformační matice umožňují přepočet souřadnic i při vícenásobném natočení kolem různých os. Tak například při natočení souřadného systému nejprve kolem osy z o úhel ϑ a pak kolem x o úhel α bude přepočet souřadnic vypadat následovně

$$(\mathbf{p})_b = \mathbf{R}_{z,\vartheta}.\mathbf{R}_{x,\alpha}.(\mathbf{p})_0 \tag{2-11}$$

přitom je nutno zachovat pořadí matic takové, jaké bylo pořadí pohybů.

Příklad 2-1[2] Výpočet transformační matice pro dvě následné rotace

Bod **P** má v souřadném systému LCS_0 souřadnice $\mathbf{P} = [2 \quad 3 \quad 4]^T$. Hledány jsou jeho souřadnice v základním souřadném systému *GCS*, jestliže je systém LCS_0 natočen vůči základnímu souřadnému systému nejprve kolem osy z o úhel $\vartheta = \pi/6$ a pak kolem osy y o úhel $\varphi = \pi/3$

$$\theta := \frac{\pi}{6} \qquad \phi := \frac{\pi}{3} \qquad P_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé transformační matice:

$$R_{z\theta} := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_{y\phi} := \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Výsledná transformační matice:

$$R := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Výslednou transformační matici lze vyjádřit také symbolickým vynásobením obou matic a vyčíslit

$$R := \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cdot\cos(\phi) & -\sin(\theta) & \cos(\theta)\cdot\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cdot\cos(\phi) & \cos(\theta) & \sin(\theta)\cdot\sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 0.433 & -0.5 & 0.75 \\ 0.25 & 0.866 & 0.433 \\ -0.866 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Přepočet souřadnic bodu **P**:

[2] Řešení příkladu je provedeno v matematickém výpočetním SW Mathcad, výrazy proto nejsou číslovány a symboly řecké abecedy mají jiný tvar než v prostředí Microsoft Word. Nejsou používány jednotky.

$$P_b := R \cdot P_0 \qquad P_b := \begin{pmatrix} 0.433 & -0.5 & 0.75 \\ 0.25 & 0.866 & 0.433 \\ -0.866 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad P_b = \begin{pmatrix} 2.366 \\ 4.83 \\ 0.268 \end{pmatrix}$$

Souřadnice bodu **P** v základním souřadném systému jsou $\mathbf{P}_b = [2.366 \quad 4.830 \quad 0.268]^T$.

2.3 Rotace a translace souřadných systémů

Transformační matici je možno rozšířit i na případ, kdy dochází současně k natočení souřadných systémů vůči sobě a posunutí počátku druhého souřadného systému vůči prvnímu. Na Obr. 2-3 je znázorněn případ natočení souřadného systému x_0, y_0, z_0 (LCS_0) kolem osy *x* o úhel α a posunutí jeho počátku o vektor $\mathbf{p}_{b0} = [p_x \quad p_y \quad p_z]^T$ vůči *GCS*. Pro přepočet souřadnic obecného bodu $\mathbf{P} = [x_0 \quad y_0 \quad z_0]^T$ z lokálního souřadného systému LCS_0 do základního souřadného systému *GCS* platí transformační rovnice

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{x,\alpha} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \tag{2-12}$$

Vztah ze přepsat na soustavu tří rovnic, které doplníme formálně rovnicí čtvrtou

$$1 = 0 + 0 + 0 + 1 \tag{2-13}$$

a soustavu těchto čtyř rovnic je možno opět zapsat maticově ve tvaru

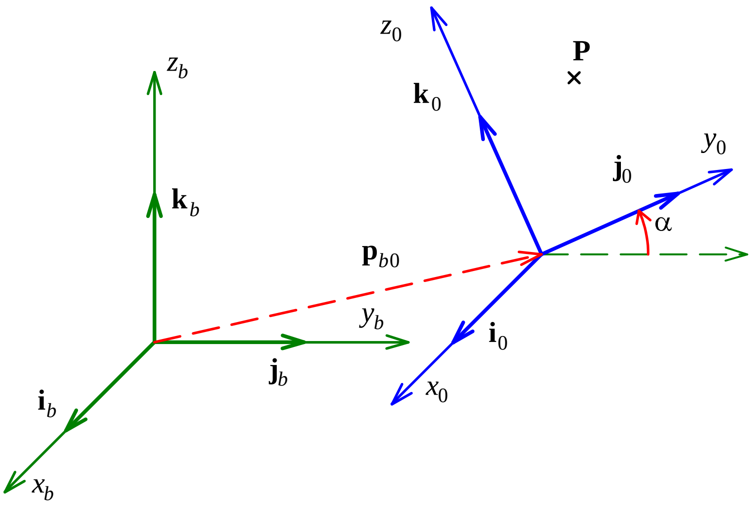
$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} & & & p_x \\ & \mathbf{R}_{x,\alpha} & & p_y \\ & & & p_z \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-14}$$

a symbolicky

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P})_b = \mathbf{A}_{b0} . (\mathbf{P})_0 \tag{2-15}$$

Výše uvedený maticový i symbolický zápis vyjadřuje transformační vztah pro přepočet souřadnic bodu **P** vyjádřeného v souřadnicích posunutého a natočeného souřadného systému LCS_0 do souřadnic souřadného systému *GCS*. Bod **P** je vyjádřen čtyřmi souřadnicemi, jedná se tedy o tzv. homogenní souřadnice bodu **P**.

Homogenní transformační matice $\mathbf{A}_{b0}$ má rozměr 4×4 a obsahuje jednak submatici rotace **R**, která vyjadřuje natočení souřadného systému x_0, y_0, z_0 vůči x_b, y_b, z_b, poslední sloupec udává polohu počátku souřadného systému x_0, y_0, z_0, vyjádřenou v souřadnicích souřadného systému x_b, y_b, z_b. Poslední řádek homogenní transformační matice odpovídá fyzikálnímu významu jednotlivých sloupců. První tři sloupce vyjadřují homogenní souřadnice jednotkových vektorů $\mathbf{i}_0$, $\mathbf{j}_0$, $\mathbf{k}_0$ vyjádřených v souřadném systému x_b, y_b, z_b (poslední souřadnice je nula), poslední sloupec jsou homogenní souřadnice počátku (tedy bodu) souřadného systému x_0, y_0, z_0 vyjádřené v souřadném systému x_b, y_b, z_b.Na základě uvedených vztahů je možno tedy sestavit transformační matici pro libovolně vzdálené a natočené souřadné systémy a pokud je jich více, lze výslednou transformační matici sestavit vynásobením jednotlivých dílčích transformačních matic v pořadí, které odpovídá pořadí souřadných systémů.



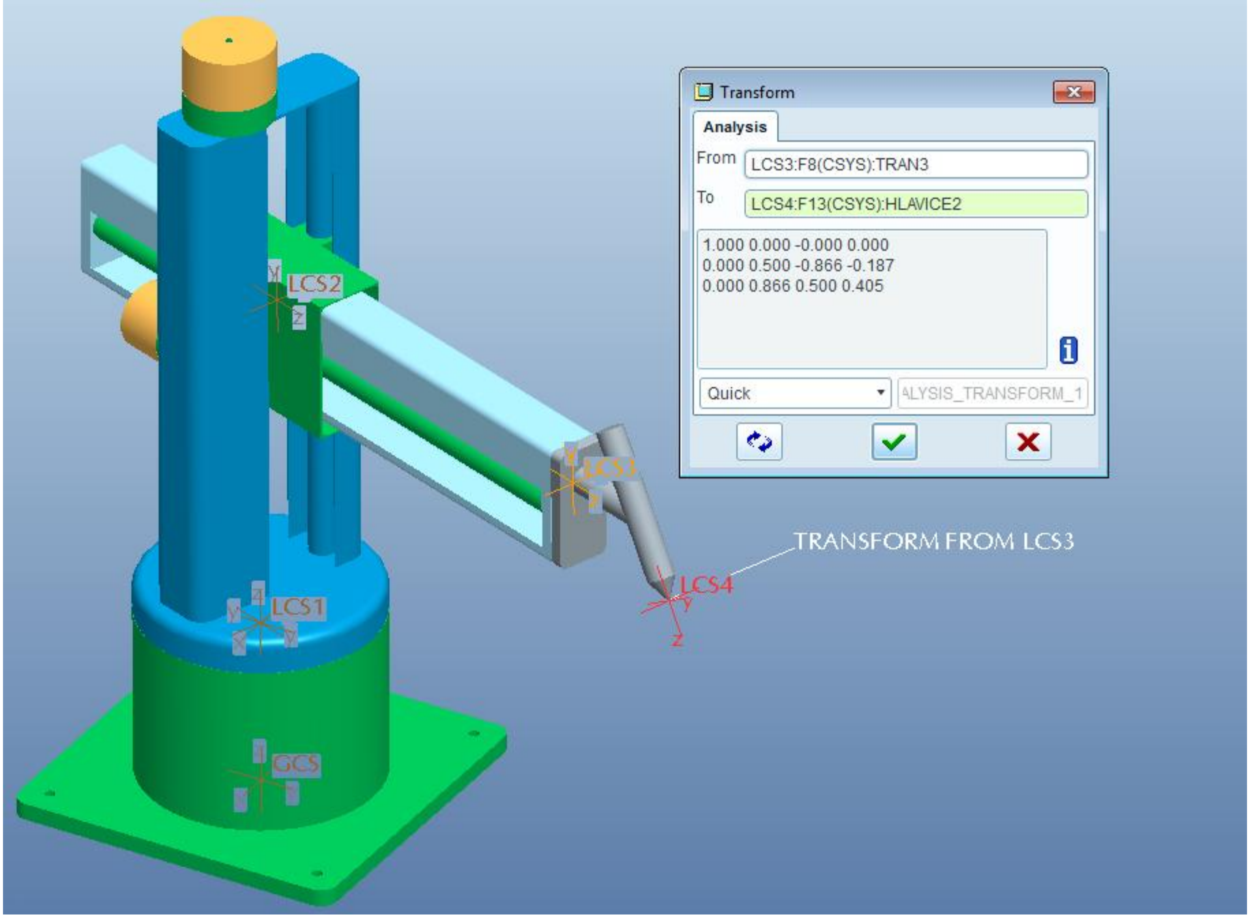
Obr. 2-3

Příklad 2-2 Zjištění transformační matice v prostředí Pro/Engineer

V případě, že na konci posledního pohyblivého článku je technologická hlavice, u které potřebujeme stanovit přibližovací vektor, popř. směr dalších os, umístíme do pracovního bodu další lokální souřadný systém – v tomto případě LCS_4. Stanovení transformační matice mezi lokálním souřadným systémem LCS_3 posledního článku a LCS_4 technologické hlavice dle Obr. 2-4 je ukázáno v následujícím postupu:

..\Animace\transform_hlavice\transform_hlavice.mp4

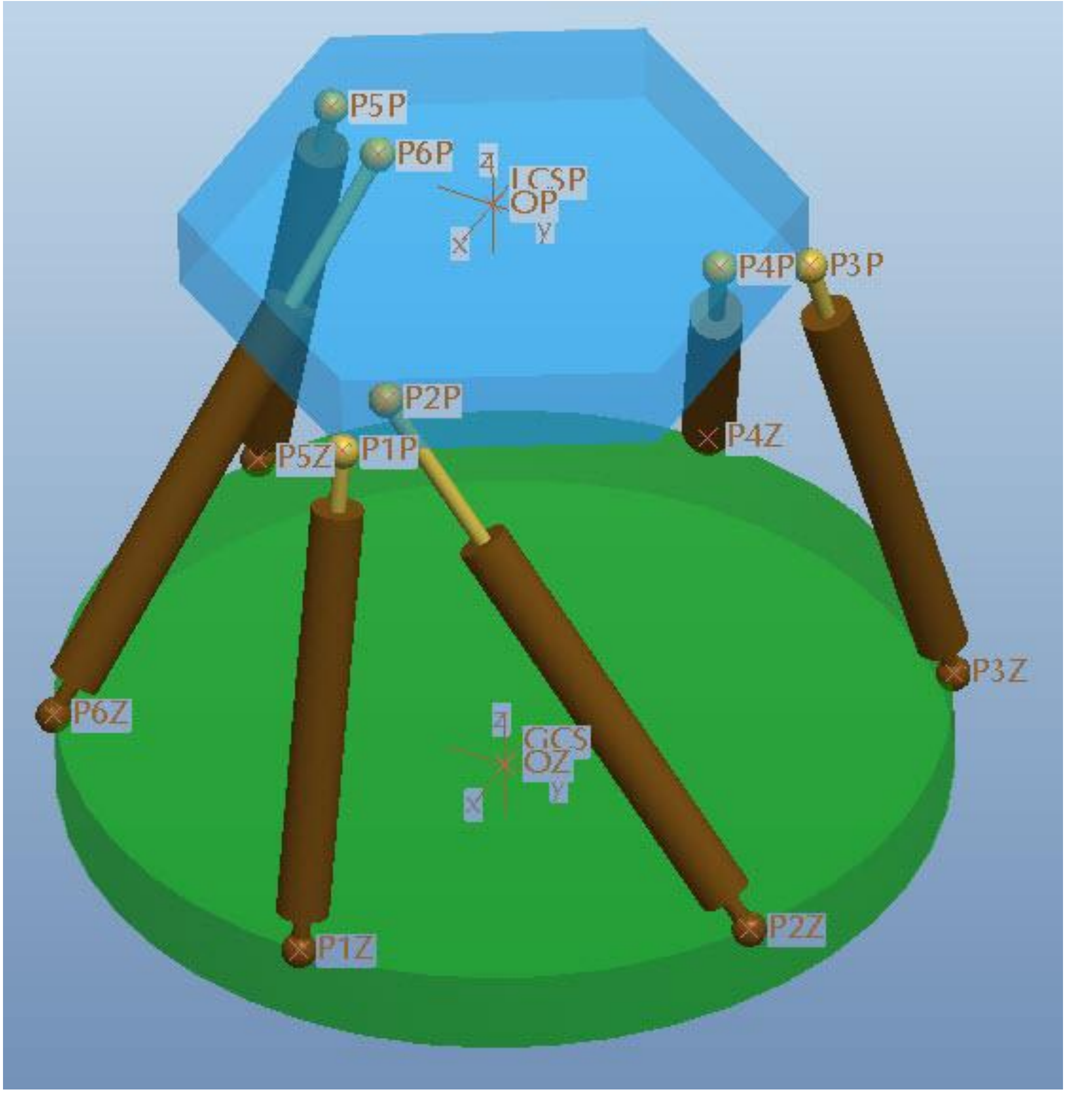
V případě, že konstrukční dokumentace je dostupná v jiném CAD systému (např. 2D AutoCAD), který by neumožňoval přímé stanovení transformační matice, by bylo nutno na osách LCS_4 nakreslit jednotkové vektory (přímky o délce 1 v daných jednotkách), tyto vektory přenést rovnoběžně do LCS_3 a použít vztah (2-5).



Obr. 2-4

Příklad 2-3 Řešení inverzní úlohy kinematiky pro paralelní kinematickou strukturu hexapod

Pro paralelní kinematickou strukturu se šesti stupni volnosti, zvanou obecně hexapod dle Obr. 2-5, je zadáním nalezení pruběhů žádaných hodnot polohy jednotlivých lineárních pohonů, které manipulační nadstavbou pohybují. Definována je výchozí poloha a požadovaný pohyb platformy – translace ve směru os základního souřadného systému GCS a rotace kolem těchto os. Nejprve je ukázáno řešení v prostředí Mathcad. Průběhy polohy jsou definovány jako funkce času pro jednotlivé rotační a translační pohyby a dále jsou vyjádřeny odpovídající transformační matice.



Obr. 2-5

Délka řešení - rozsah nastavení proměnné t – čas (rozsahová proměnná – *range variable*)

$t := 0, 1 .. 5$

Rotace kolem osy x o úhel

$\alpha(t) := 3° \cdot t$

$$A_{x\alpha}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha(t)) & -\sin(\alpha(t)) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha(t)) & \cos(\alpha(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy y o úhel

$\phi(t) := 1.7° \cdot t$

$$A_{y\phi}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\phi(t)) & 0 & \sin(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\phi(t)) & 0 & \cos(\phi(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy z o úhel

$$\theta(t) := 5.7°\cdot t$$

$$A_{z\theta}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Posuvy ve smě ru osy x, y, z

$$x(t) := 0.01\cdot t \qquad y(t) := 0.02\cdot t \qquad z(t) := 0.8 + 0.01\cdot t$$

$$A_{xp}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x(t) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{yp}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & y(t) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{zp}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Výsledná transformační matice pro současný pohyb všech 6 stupňů volnosti, dle výše uvedených definicí, mezi základnou - index b a pohyblivou platformou - index p

$$T_{bp}(t) := A_{xp}(t)\cdot A_{yp}(t)\cdot A_{zp}(t)\cdot A_{x\alpha}(t)\cdot A_{y\phi}(t)\cdot A_{z\theta}(t)$$

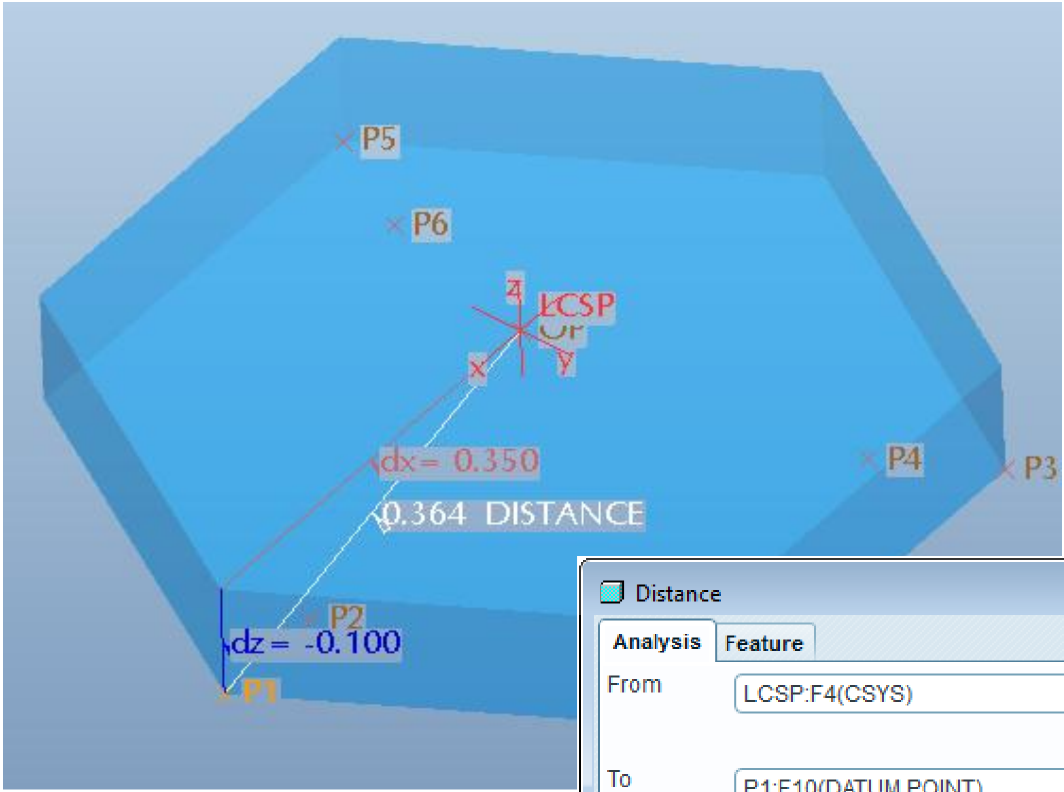
Vyčíslení transformační matice pro daný čas t=5 sec a kontrola s výsledkem v Pro/E

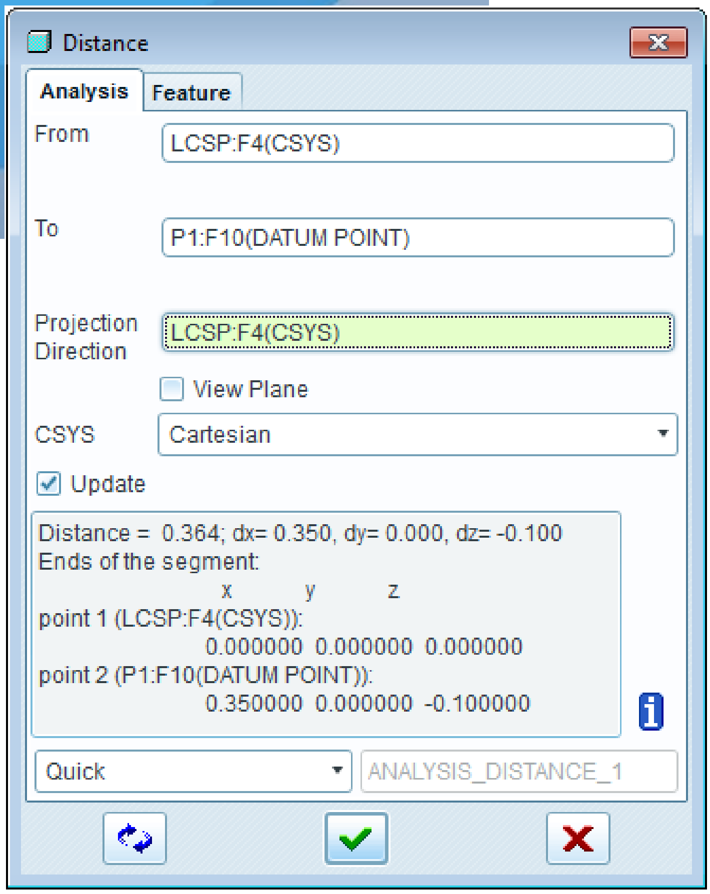
$$T_{bp}(5) = \begin{pmatrix} 0.869 & -0.472 & 0.148 & 0.05 \\ 0.495 & 0.831 & -0.256 & 0.1 \\ -1.974\times 10^{-3} & 0.296 & 0.955 & 0.85 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Souř adnice bodů připojení pohyblivé platformy
v lokalnim ss platformy - LCSP

$$P_{1pp} := \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{2pp} := \begin{pmatrix} 0.23453 \\ 0 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{3pp} := \begin{pmatrix} -0.175 \\ 0.303109 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{4pp} := \begin{pmatrix} -0.117265 \\ 0.203109 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{5pp} := \begin{pmatrix} -0.175 \\ -0.303109 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{6pp} := \begin{pmatrix} -0.117265 \\ -0.203109 \\ -0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$





Nalezení souřadnic bodů P1P až P6P v lokálním souřadném systému platformy v prostředí systému Pro/Engineer je provedeno pomocí funkce Analysis, Measure, Distance. Souřadnice těchto bodů musí být přepočteny z lokálního souřadného systému do globálního souřadného systému základu pro to, aby byly tyto body vyjádřeny ve stejném souřadném systému jako body na základu a bylo možno jejich souřadnice odečíst a vypočítat tak jejich vzdálenost. Přepočtení souřadnic bodů P1P až P6P platformy v globalním souřadném systému GCS se provede násobením souřadnic v lokálním souřadném systému transformační maticí zleva.

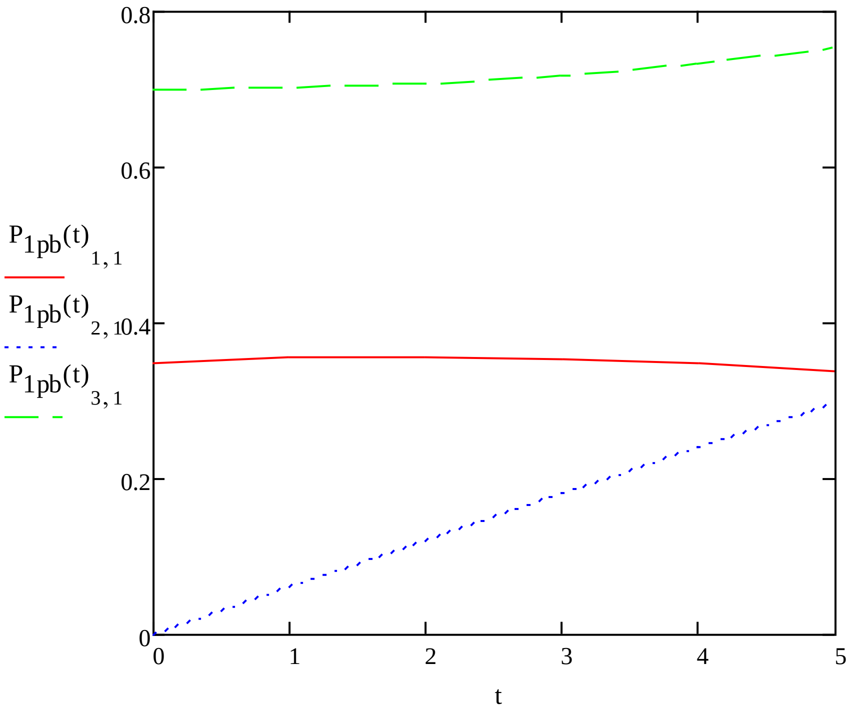
$$P_{1pb}(t) := T_{bp}(t) \cdot P_{1pp} \qquad P_{2pb}(t) := T_{bp}(t) \cdot P_{2pp} \qquad P_{3pb}(t) := T_{bp}(t) \cdot P_{3pp}$$

$$P_{1pb}(0) = \begin{pmatrix} 0.350 \\ 0.000 \\ 0.700 \\ 1.000 \end{pmatrix} \qquad P_{2pb}(0) = \begin{pmatrix} 0.235 \\ 0.000 \\ 0.700 \\ 1.000 \end{pmatrix} \qquad P_{3pb}(0) = \begin{pmatrix} -0.175 \\ 0.303 \\ 0.700 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

$$P_{4pb}(t) := T_{bp}(t) \cdot P_{4pp} \qquad P_{5pb}(t) := T_{bp}(t) \cdot P_{5pp} \qquad P_{6pb}(t) := T_{bp}(t) \cdot P_{6pp}$$

$$P_{4pb}(0) = \begin{pmatrix} -0.117 \\ 0.203 \\ 0.700 \\ 1.000 \end{pmatrix} \qquad P_{5pb}(0) = \begin{pmatrix} -0.175 \\ -0.303 \\ 0.700 \\ 1.000 \end{pmatrix} \qquad P_{6pb}(0) = \begin{pmatrix} -0.117 \\ -0.203 \\ 0.700 \\ 1.000 \end{pmatrix}$$

Příklad zobrazení průběhu polohy bodu (jeho souřadnic) P1 platformy v základním souřadném systému



Souřadnice bodů připojení pohyblivé platformy na základně v globálnim ss - GCS

$$P_{1zb} := \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{2zb} := \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0.433 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{3zb} := \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.433 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{4zb} := \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{5zb} := \begin{pmatrix} -0.25 \\ -0.433 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{6zb} := \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.433 \\ 0.1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Žádané hodnoty polohy pro regulátory polohy jednotlivých válců (délka vysunutí) se vypočtou jako vzdálenost (absolutní hodnota) mezi připojovacími body jednotlivých lineárních pohonů, přepočtenými do základního souřadného systému, přitom je třeba pomocí operace submatrix (submatice) vyjmout pouze první tři souřadnice bodu (vynechat čtvrtou homogenní souřadnici).

Pohon 1 je mezi P1pb na platformě (v báz.ss) a P1zb (v báz. ss)

$$q_1(t) := \left|\mathrm{submatrix}\left(P_{1pb}(t) - P_{1zb}, 1, 3, 1, 1\right)\right|$$

$q_1(t) =$

0.618
0.622
0.636
0.661
0.695
0.736

Pohon 2 je mezi P2pb na platformě (v báz.ss) a P2zb (v báz. ss)

$$q_2(t) := \left|\mathrm{submatrix}\left(P_{2pb}(t) - P_{2zb}, 1, 3, 1, 1\right)\right|$$

$q_2(t) =$

0.740
0.716
0.698
0.685
0.680
0.682

Pohon 3 je mezi P3pb na platformě (v báz.ss) a P3zb (v báz. ss)

$$q_3(t) := \left|\mathrm{submatrix}\left(P_{3pb}(t) - P_{3zb}, 1, 3, 1, 1\right)\right|$$

$q_3(t) =$

0.618
0.645
0.674
0.703
0.731
0.758

Pohon 4 je mezi P4pb na platformě (v báz.ss) a P4zb (v báz. ss)

$$q_4(t) := \left|\mathrm{submatrix}\left(P_{4pb}(t) - P_{4zb}, 1, 3, 1, 1\right)\right|$$

$q_4(t) =$

0.740
0.757
0.774
0.792
0.809
0.825

Pohon 5 je mezi P5pb na platformě (v báz.ss) a P5zb (v báz. ss)

$$q_5(t) := \left|\mathrm{submatrix}\left(P_{5pb}(t) - P_{5zb}, 1, 3, 1, 1\right)\right|$$

$q_5(t) =$

0.618
0.624
0.631
0.639
0.651
0.667

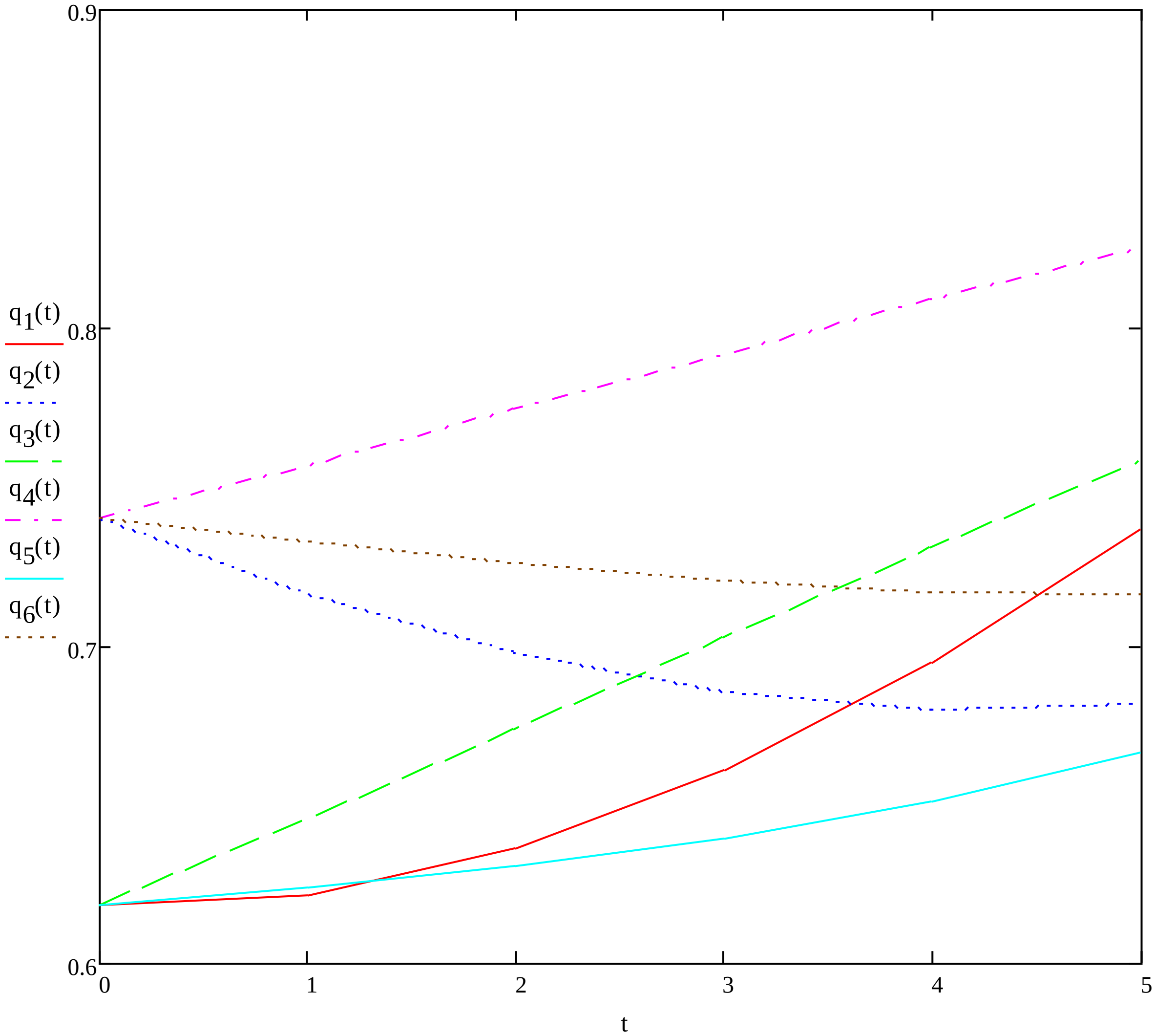
Pohon 6 je mezi P6pb na platformě (v báz.ss) a P6zb (v báz. ss)

$$q_6(t) := \left|\mathrm{submatrix}\left(P_{6pb}(t) - P_{6zb}, 1, 3, 1, 1\right)\right|$$

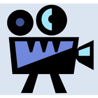
$q_6(t) =$

0.740
0.733
0.726
0.720
0.717
0.716

Grafické zobrazení jednotlivých kloubových proměnných – zobecněných souřadnic šesti lineárních pohonů je na následujícím obrázku.

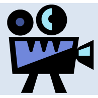


Řešení stejného problému v prostředí systému Pro/Engineer Mechanism je ukázáno jako animovaný postup na následujícím videu. Nejprve je ukázáno sestavení mechanismu v prostředí nadstavby Mechanism.



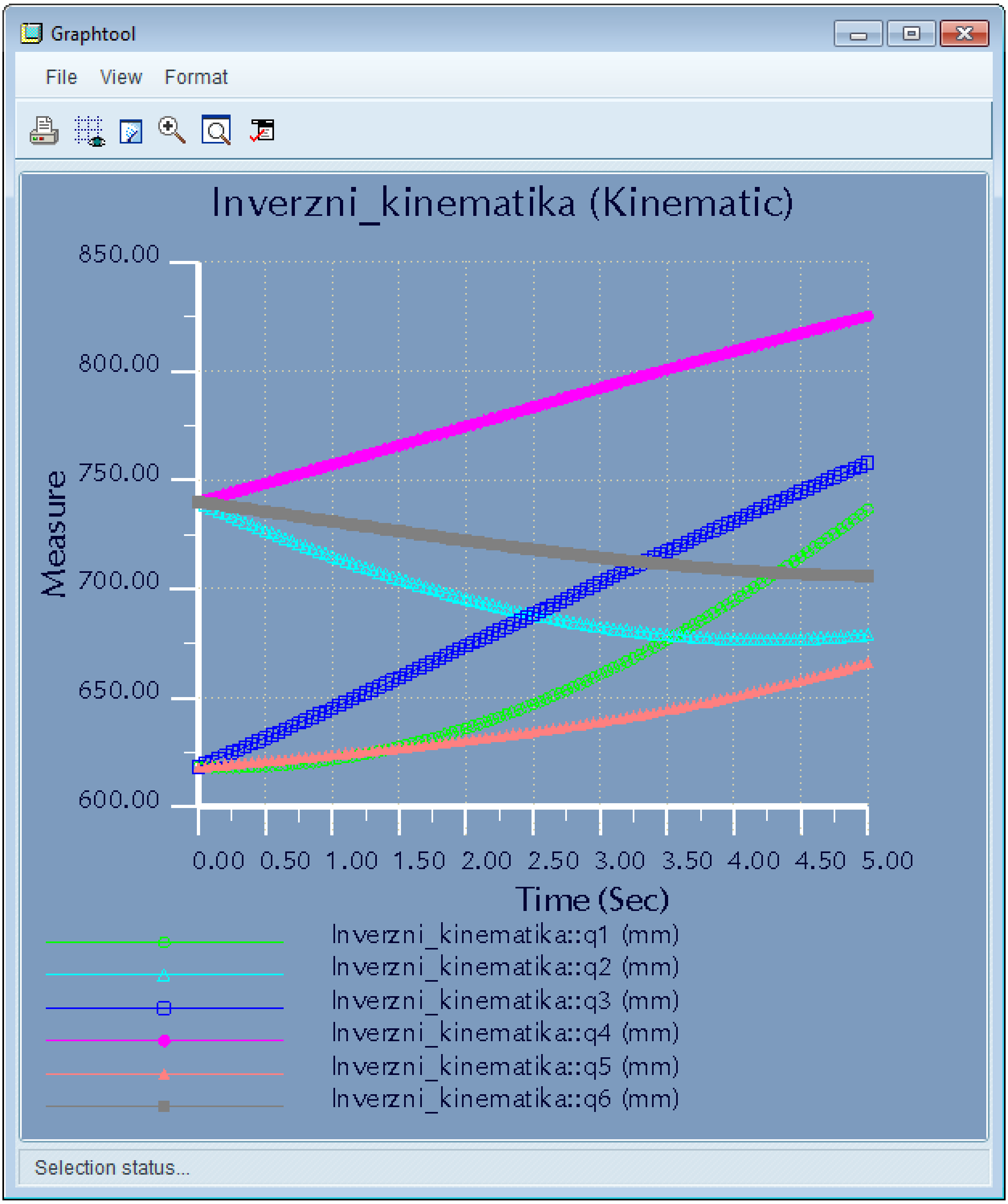
..\Animace\Hexapod\Hexapod_sestaveni_mechanismu\Hexapod_sestaveni_mechanismu.mp4

Řešení zadaného problému – řešení inverzní úlohy kinematiky – nalezení průběhů zobecněných souřadnic $q_1, q_2, \ldots, q_6$ je ukázáno jako animovaný postup v následujícím videu.



..\Animace\Hexapod\Hexapod_inverzni_kinematika\Hexapod_inverzni_kinematika.mp4

Výsledek řešení inverzní kinematické úlohy paralelního mechanismu hexapodu v prostředí Pro/Engineer Mechanism je ukázán na Obr. 2-6. Jak je vidět z výpočetního řešení v prostředí Mathcadu, řešení inverzní úlohy kinematiky je u paralelních mechanismů typu pohyblivé platformy, připojené jednoduchými (z hlediska kinematické struktury) rameny, je relativně jednoduché. Stejná úloha pro typické sériové kinematické struktury průmyslových robotů je mnohem složitější.

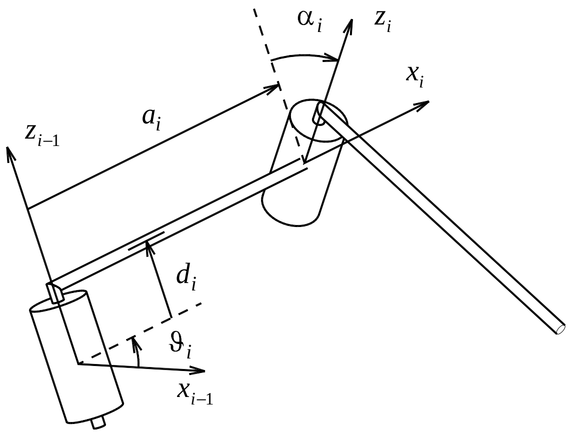


Obr. 2-6

2.4 Denavit - Hartenbergův princip rozmístění souřadných systémů

Souřadné systémy je možno do článků umísťovat v podstatě libovolně, např. do středového bodu kinematických dvojic, do těžišť apod., ale sestavení transformační matice někdy není jednoduché a je nutno použít řadu goniometrických vzorců. Při dodržení konvence rozmísťování souřadných systémů (Denavit a Hartenberg, 1955), je možno sestavovat vzájemné transformační matice automaticky.

Princip je ukázán na Obr. 2-7, kde jsou nakresleny dvě rotační pohybové jednotky, spojené ramenem, které jsou obecně orientovány v prostoru, a dále dva lokální souřadné systémy LCS_{i-1} a LCS_i umístěné podle zmíněné konvence.



Obr. 2-7

Chceme-li nalézt transformační vztah mezi těmito souřadnými systémy, vykonáme fiktivní pohyby, které by vedly k sjednocení obou souřadných systémů. Nejprve natočíme osu x_{i-1} kolem osy z_{i-1} o úhel ϑ_i tak, že osy x_{i-1} a x_i jsou rovnoběžné. Dále posuneme osu x_{i-1} ve směru osy z_{i-1} o vzdálenost d_i tak, že osy x_{i-1} a x_i jsou totožné. Nyní posuneme počátek souřadného systému LCS_{i-1} podél osy x_i o vzdálenost a_i tak, že počátky souřadných systémů LCS_{i-1} a LCS_i jsou totožné. Nyní zbývá natočit osu z_{i-1} kolem x_i o úhel α na osu z_i a souřadné systémy LCS_{i-1} a LCS_i jsou totožné. Uvedený princip platí obecně a říká, že libovolně orientované a posunuté souřadné systémy je možno sjednotit čtyřmi jednoduchými pohyby – rotací, translací, translací a zase rotací a pokud rozmístíme souřadné systémy podle konvence specifikované Denavitem a Hartenbergem, jsou tyto pohyby definovány tak, jak bylo uvedeno výše. Z Obr. 2-7 je zatím zřejmé, že osy z_{i-1} a z_i jsou osou rotace rotačních pohybových jednotek, osa x_i leží ve směru společné normály os z_{i-1} a z_i. Další pravidla Denavit-Hartenbergova principu rozmísťování souřadných systémů jsou uvedena dále.

Transformační vztah mezi dvěma sousedními souřadnými systémy LCS_{i-1} a LCS_i je tedy dán čtyřmi jednoduchými pohyby, které lze popsat následujícími transformačními maticemi v homogenním tvaru

Natočení osy x_{i-1} kolem osy z_{i-1} o úhel ϑ_i

$$\mathbf{A}_{z_{i-1},\vartheta_i} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-16}$$

Posunutí osy x_{i-1} ve směru osy z_{i-1} o vzdálenost d_i

$$\mathbf{A}_{z_{i-1},d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-17}$$

Posunutí počátku souřadného systému LCS_{i-1} podél osy x_i o vzdálenost a_i

$$\mathbf{A}_{x_i,a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-18}$$

Natočení osy z_{i-1} kolem x_i o úhel α

$$\mathbf{A}_{x_i,\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-19}$$

Výsledná transformační matice mezi sousedními souřadnými systémy vznikne vynásobením jednotlivých dílčích transformačních matic v pořadí tak, jak byly prováděny pohyby

$$\mathbf{A}_{i-1,\,i} = \mathbf{A}_{z_{i-1},\vartheta_i}.\mathbf{A}_{z_{i-1},d_i}.\mathbf{A}_{x_i,a_i}.\mathbf{A}_{x_i,\alpha_i} \tag{2-20}$$

a po vynásobení v obecném tvaru

$$\mathbf{A}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_i & -\sin\vartheta_i\cos\alpha_i & \sin\vartheta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\vartheta_i \\ \sin\vartheta_i & \cos\vartheta_i\cos\alpha_i & -\cos\vartheta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\vartheta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-21}$$

kde tzv. Denavit-Hartenbergovy parametry $\vartheta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ plně charakterizují geometrické vztahy mezi sousedními články spojenými rotační nebo translační pohybovou jednotkou.

Homogenní transformační matice dle vztahu (2-21) je univerzální transformační matice mezi dvěma sousedními souřadnými systémy a její výhodou je, že má stejný tvar pro všechny lokální souřadné systémy kinematické struktury bez ohledu na typ pohybových jednotek. V následujících kapitolách budou jako základní vazby použity pouze vazby rotační a translační, popř. pevné spojení, všechny složitější vazby – např. planární (dvě translace, jedna rotace kolmo na translace) vzniknou násobným použitím základních vazeb a jejich orientací. Pro rotační pohybovou jednotku, obsahuje transformační matice pouze jednu proměnnou otočení pohybové jednotky ϑ_i, ostatní parametry jsou konstantní a charakterizují ostatní rozměry článku a jeho orientaci, pokud je pohybová jednotka translační, obsahuje matice pouze proměnnou posuvu pohybové jednotky d_i a ostatní parametry jsou konstantní. Parametry $\vartheta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ se dají poměrně snadno odečíst po rozmístění souřadných systémů podle Denavit-Hartenbergova principu a mají následující geometrický význam:

ϑ_i úhel mezi osami x_{i-1} a x_i při otáčení kolem z_{i-1}
d_i nejkratší vzdálenost (normála) mezi osami x_{i-1} a x_i , kladný směr ve směru z_{i-1}

a_i nejkratší vzdálenost (normála) mezi osami z_{i-1} a z_i, kladný směr ve směru x_i

α_i úhel mezi osami z_{i-1} a z_i při otáčení kolem x_i

Vlastní postup rozmísťování lokálních souřadných systémů je tedy následující:

- Číslovat články od základu, první nepohyblivý článek má číslo 0, další pohyblivé články čísla 1..*n*. Případná poslední nepohyblivá hlavice *n*+1. Vzestupná sekvence indexů je *b*, 0, 1..*n*.
- Číslovat pohybové jednotky od základu, *i*-tá pohybová jednotka spojuje *i*-1 a *i*-tý článek.
- Osa z_{i-1} je osou pohybu *i*-té pohybové jednotky, kladný směr os směřuje nejlépe do kladného kvadrantu základního souřadného systému.
- Osa x_i je kolmá na osy z_{i-1} a z_i. Případy:
  a) osy z_{i-1} a z_i jsou totožné - případ z_b a z_0. V tomto případě je možné vést osu x_0 kolmo na obě totožné osy v libovolném místě a libovolným směrem, nejlépe je ale umístit počátek do určitého bodu na příslušném článku, v našem případě do koncového bodu 0-tého článku, směr nejlépe rovnoběžně s některou předchozí osou, nejlépe s x_b (zjednoduší se transformační matice),
  b) osy z_{i-1} a z_i jsou mimoběžné – případ z_0 a z_1, osa x_1 leží ve společné normále os z_{i-1} a z_i a její kladný směr je dán směrem od osy s nižším indexem (z_0) k ose s vyšším indexem (z_1) v pořadí indexů,
  c) osy z_{i-1} a z_i jsou různoběžné – případ z_1 a z_2, osa x_2 vede kolmo na osy z_1 a z_2 a vychází z jejich průsečíku, kladný směr osy je dán požadavkem, aby při rotaci kolem osy x_2 přešla osa z s nižším indexem (z_1) na osu ze s vyšším indexem (z_2) v kladném směru otáčení,
  d) jak vypývá z předchozích případů, osa x_i vždy protíná předchozí osu z_{i-1}. To je využito zejména u translačních článků, kdy je sice zřejmá orientace osy z_{i-1}, ale není zřejmé, kudy vede.
- Počátek posledního souřadného systému se umisťuje do koncového bodu posledního článku, popř. do koncového bodu technologické hlavice, jeho osy vedeme nejlépe rovnoběžně s osami předchozího souřadného systému nebo je umístíme do některého význačného směru (např. rovnoběžně s technologickým přívodem do hlavice apod.). Kladný směr os posledního souřadného systému směrujeme do pracovního prostoru mechanismu (hlavice, čelistí apod.)

Homogenní transformační matice mezi dvěma sousedními souřadnými systémy článků, které jsou spojeny rotační nebo translační pohybovou jednotkou má obecně tvar

$$\mathbf{A}_{i-1,i} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R} & & \mathbf{p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2-22}$$

kde **R** je submatice vzájemné rotace souřadných systémů a **p** je vektor posunutí jejich počátků. Jak už bylo uvedeno, první tři sloupce transformační matice $\mathbf{A}_{i-1,i}$ mají fyzikální význam homogenních souřadnic jednotkových vektorů $\mathbf{i}_i$, $\mathbf{j}_i$, $\mathbf{k}_i$ na osách *i*-tého souřadného systému (LCS_i) vyjádřené v souřadnicích *i*-1 souřadného systému (LCS_{i-1}). Poslední sloupec matice udává homogenní souřadnice počátku LCS_i vyjádřené v LCS_{i-1}. Celková transformační matice mezi základním souřadným systémem a posledním *n*-tým souřadným systémem vznikne vynásobením jednotlivých transformačních matic pro sousední souřadné systémy v pořadí, jak jsou lokální souřadné systémy očíslovány a je funkcí všech zobecněných souřadnic a v symbolickém tvaru vede ke značně komplikovaným trigonometrickým výrazům na místě jednotlivých prvků matice

$$\mathbf{T}_{bn} \; q_1, q_2, ..., q_n \; = \mathbf{A}_{b0} . \mathbf{A}_{01} \; q_1 \; . \mathbf{A}_{12} \; q_2 \; . \; ... \; \mathbf{A}_{n-1,n} \; q_n \tag{2-23}$$

Tato celková transformační matice je funkcí všech kloubových proměnných a řeší tzv. přímou úlohu kinematiky, tj. nalezení souřadnic koncového bodu robotu (počátku posledního souřadného systému) - ty jsou dány posledním sloupcem celkové transformační matice (čtvrtá homogenní souřadnice je 1, tedy se jedná o souřadnice bodu) a směrů jednotlivých os (přesněji souřadnic jednotkových vektorů na osách posledního souřadného systému, vyjádřených v souřadnicích základního souřadného systému) – ty jsou dány prvními třemi sloupci celkové transformační matice (čtvrtá homogenní souřadnice je 0, tedy se jedná o souřadnice vektorů).

$$\mathbf{T}_{bn} = \left[\begin{array}{ccc|c} & \mathbf{R}_{bn} & & \mathbf{p}_{bn} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} [\mathbf{i}_n]_b & [\mathbf{j}_n]_b & [\mathbf{k}_n]_b & [\mathbf{p}_{bn}]_b \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} \mathbf{i}_n & \mathbf{j}_n & \mathbf{k}_n & \mathbf{p}_{bn} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \tag{2-24}$$

Pokud je potřeba přepočítat jiný bod než počátek z posledního n-tého lokálního souřadného systému do základního souřadného systému, při známých velikostech posuvů a natočení kinematických dvojic $q_1, q_2, ..., q_n$, je použit již uvedený transformační vztah (2-25) vlevo, pro přepočet souřadnic vektoru (např. přibližovacího vektoru **o**) vztah (2-25) vpravo

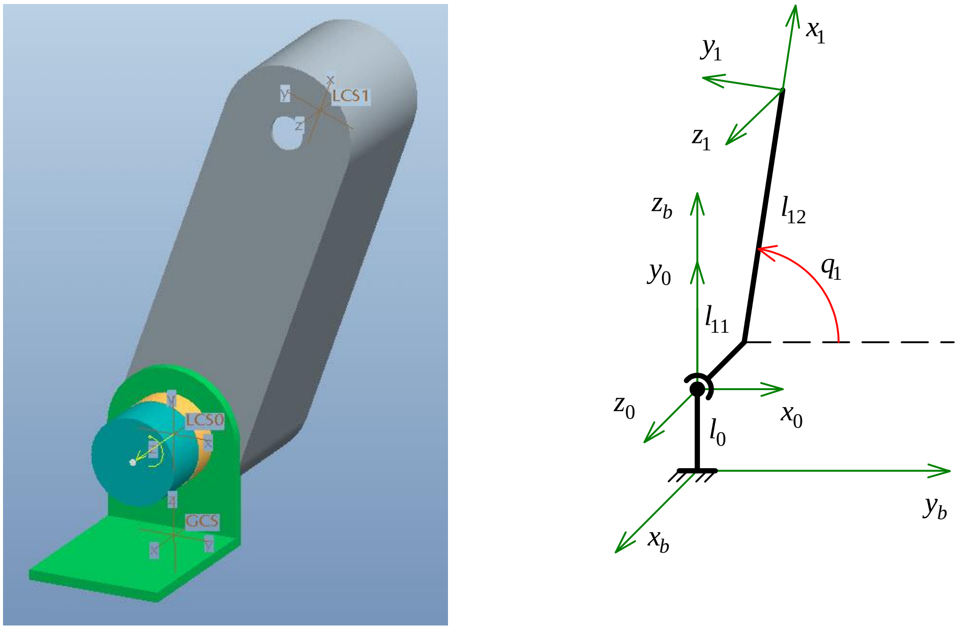
$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{bn}\ q_1, q_2, ..., q_n \ \cdot \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} o_{xb} \\ o_{yb} \\ o_{zb} \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{bn}\ q_1, q_2, ..., q_n \ \cdot \begin{bmatrix} o_{xn} \\ o_{yn} \\ o_{zn} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2-25}$$

Účelem Denavit-Hartenbergova principu je tedy vytvoření transformační matice mezi dvěma sousedními lokálními souřadnými systémy v univerzálním tvaru tak, aby bylo možno provést snadnou algoritmizaci a naprogramování výpočtu přímé úlohy kinematiky, kdy jsou do univerzálního tvaru transformační matice dosazovány v cyklu vždy jeden proměnný a tři konstantní parametry a pro obdržení hodnot celkové transformační matice $\mathbf{T}_{bn}$ je provedena standardní procedura násobení matic.

Příklad 2-4 Řešení přímé úlohy kinematiky pro mechanismus s jedním stupněm volnosti

Článek dle Obr. 2-8 vlevo je spojen se základem rotační vazbou s osou otáčení paralelní s osou x_b základního souřadného systému. Kinematická struktura článku a rozmístění souřadných systémů dle Denavit-Hartenbergova principu je na Obr. 2-8 vpravo a parametry transformačních matic jsou uvedeny v Tab.1.

Po umístění lokálních souřadných systémů (LCS_i) dle výše uvedených pravidel je možno jednoduše doplnit tabulku D-H (Denavit-Hartenbergových) parametrů – Tab. 1, kde l_0, l_{11} a l_{12} jsou rozměry článků.

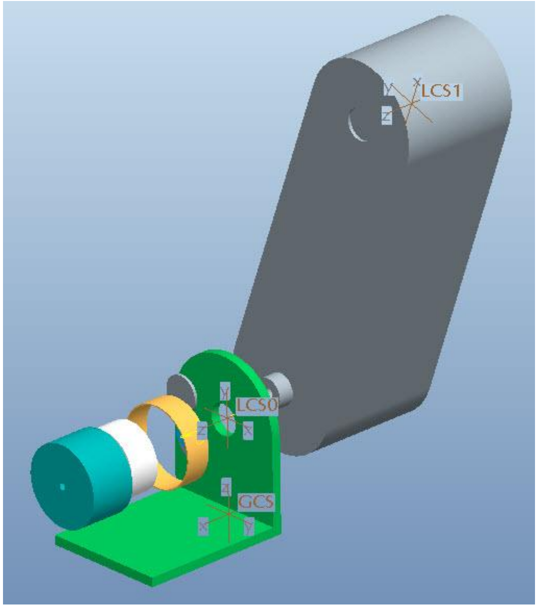


Obr. 2-8

Tab. 2-1

i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
0	$\pi/2$	l_0	0	$\pi/2$
1	q_1	l_{11}	l_{12}	0

Ve výše uvedeném příkladě, který vypadá snadno podle jednoduchého kinematického schématu, je několik problémů. Lokální souřadné systémy se totiž ve skutečnosti umisťují na 3D modelu mechanismu (popř. ve 2D dokumentaci ramen), zjednodušená čarová kinematická struktura slouží pouze k přehlednosti pozic souřadných systémů a zjednodušenému zobrazení mechanismu. První z problémů je, kde je např. umístěn nultý lokální souřadný systém LCS_0, který přísluší zelenému rámu ramene. Je třeba si uvědomit, že počátek lokálního souřadného systému současně v případě rotačních vazeb označuje polohu této vazby a tím i působiště zátěžných sil. V bodě umístění vazby se pak počítají zátěžné síly (akční, popř. reakční síla a moment), které jsou obecně orientovány v prostoru a které se pro účely dimenzování dané vazby přepočítávají na axiální a radiální síly (popř. momenty) ve smyslu hlavních os vazby. V uvedeném případě se jedná o rotační vazbu, která je prakticky realizována jedním nebo dvěma ložisky, popř. kluznými pouzdry, vhodné umístění počátku souřadného systému je tedy mezi oběma ložisky (nejlépe v poloviční vzdálenosti), popř. v případě jednoho ložiska v jeho centru. Pro dimenzování ložisek tvořících vazbu je pak vypočtená translační zátěžná síla a rotační zátěžný moment přepočten na axiální a radiální zatížení každého ložiska, jako základní údaj pro jeho dimenzování. Na rozložené sestavě (*exploded view*) na Obr. 2-9 je vidět umístění počátku LCS_0 ve středu stěny rámu, plánováno je tedy pravděpodobně jedno ložisko (zatím ve fázi koncepčního řešení mechanismu), které zachytí i klopné momenty. Pokud bude nakonec nutno použít dvě ložiska po stranách rámu, popř. jedno ložisko na rámu a druhé na opačné straně ramene, nezpůsobí to žadný výpočtový problém, pouze se změní umístění souřadného systému LCS_0 a tedy některý z Denavit-Hartenbergových parametrů a všechny ostatní výpočetní vztahy zůstanou nezměněné. Totéž platí pro umístění souřadného systému LCS_1.



Obr. 2-9

Celý výpočet v prostředí Mathcadu je na ..\Mathcad\1dof_rotace_prima_uloha.xmcd
Prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer) na ..\Mathcad\1dof_rotace_prima_uloha.html

Komentovaný výpočet je také ukázán jako animace:

..\Animace\1DOF_prima_uloha\1DOF_prima_uloha.mp4

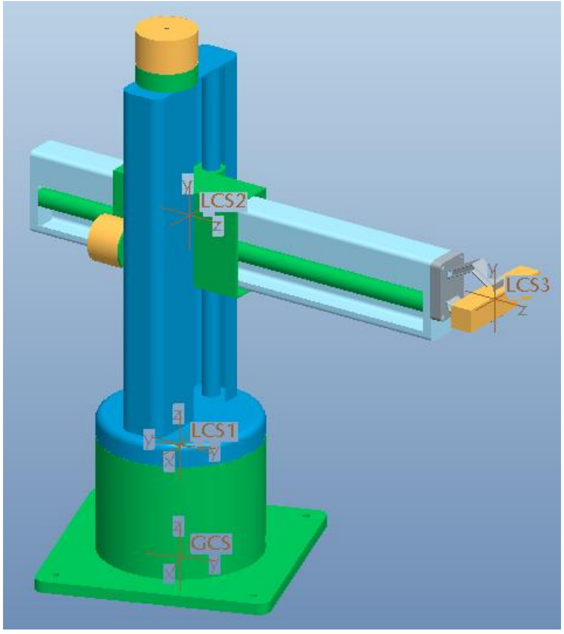
Doplňující animace se dotýká metodiky tvorby vazby mezi pohonem a vlastním článkem a vlivu dynamiky pohonu na výsledný zátěžný moment na výstupním hřídeli převodovky.

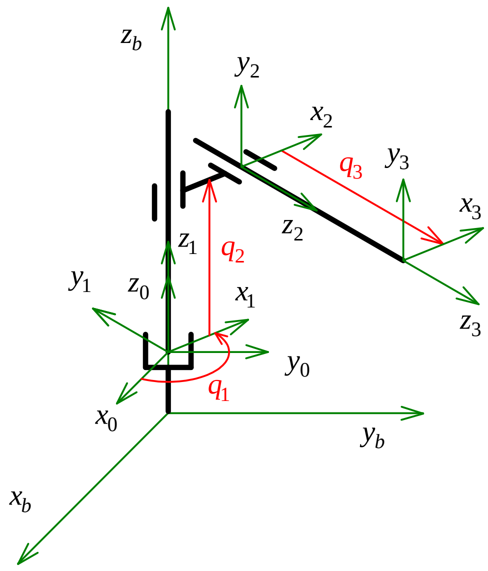
..\Animace\1DOF_rotace_dynamika\1DOF_rotace.mp4

Příklad 2-5 Řešení přímé úlohy kinematiky pro mechanismus RTT

Manipulátor s kinematickou strukturou RTT dle Obr. 2-10. Kinematická struktura a rozmístění souřadných systémů dle Denavit-Hartenbergova principu je na tomtéž obrázku vpravo, parametry transformačních matic jsou uvedeny v Tab. 2-2. Zde je nutno zdůraznit, že technologická hlavice – chapadlo je pojímáno jakou nedílná součást třetího článku a proto je poslední souřadný tém LCS_3 umístěn až ve středu úchopné hlavice. Tento přístup, pokud je možný, zjednodušuje výpočet.[3]

[3] V části tohoto textu, která se zabývá modelem dynamiky mechanismu, bude ukázáno, že je praktické zahrnout dokonce i objekt manipulace do sestavy třetího článku a hmostnostní parametry (hmotnost, poloha těžiště, matice setrvačnosti) jsou počítány pro celý třetí článek včetně hlavice a objektu manipulace.





Obr. 2-10

Tab. 2-2

i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
0	0	l_0	0	0
1	q_1	0	0	0
2	0	q_2	l_2	$\pi/2$
3	0	q_3	0	0

Jak už bylo uvedeno v předchozím příkladu, v každém řádku kromě prvního (nepohyblivý podstavec – tzv. nulový článek) může být pouze jedna zobecněná proměnná q_i, v případě rotační vazby daného článku je vždy ve sloupci ϑ_i, v případě translační vazby je vždy ve sloupci pod d_i. V tomto případě se jedná o kinematickou strukturu RTT (rotace, translace, translace), první zobecněná proměnná je tedy označena obecným symbolem q_1, je umístěna ve sloupci pod ϑ_i a má rozměr úhlu [rad], druhá zobecněná proměnná je q_2 a je to posunutí v délkových jednotkách a je umístěná ve druhém sloupci pod d_i. Stejně i třetí zobecněná proměnná q_3. Čtyři Denavit-Hartenbergovy parametry z řádku s indexem 0 jsou parametry, které určují transformační vztah mezi základním souřadným systémem GCS a LCS_0, který je pevně spojen s článkem 0 a je nepohyblivý, a dosazují se do transformační matice $\mathbf{A}_{b0}$. Parametry z řádku s indexem 1 jsou parametry, které určují transformační vztah mezi LCS_0 a LCS_1 spojeným s článkem 1 a dosazují se do transformační matice $\mathbf{A}_{01}(q_1)$, která je funkcí jediné proměnné q_1 (v tomto případě se jedná o úhlové natočení v radiánech, popř. ve stupních). Analogicky se čtyři Denavit-Hartenbergovy parametry z řádku s indexem $i=2$ dosazují do transformační matice $\mathbf{A}_{12}(q_2)$ a parametry z řádku s indexem $i=3$ dosazují do transformační matice $\mathbf{A}_{23}(q_3)$. Výsledná transformační matice mezi posledním souřadným systémem LCS_3 a GCS je dána součinem dílčích transformačních matic

$$\mathbf{T}_{b3}(q_1,q_2,q_3)=\mathbf{A}_{b0}.\mathbf{A}_{01}(q_1).\mathbf{A}_{12}(q_2).\mathbf{A}_{23}(q_3) \quad (2\text{-}26)$$

Pak souřadnice např. koncového bodu nástroje upevněného k poslednímu článku (jeho souřadnice v LCS_3 jsou pevné a odečteme z výkresu) přepočteme do základního souřadného systému GCS vztahem

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{b3}(q_1, q_2, q_3) \ . \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-27}$$

Je zřejmé, že souřadnice x_b, y_b, z_b koncového bodu jsou funkcí natočení q_1 a posunutí q_2 a q_3 a také pevných rozměrů mechanismu - l_0 je výška článku 0 (základu), l_2 je vzdálenost osy otáčení článku 1 a článku 3.

Vztah (2-27) platí obecně i pro kinematickou strukturu s více články a tak transformační matice mezi základním souřadným systémem *GCS* a posledním lokálním souřadným systémem LCS_n, spojeným s pracovním bodem mechanismu, je ve tvaru

$$\mathbf{T}_{bn}(q_1, q_2, \ \dots, q_n) = \mathbf{A}_{b0}.\mathbf{A}_{01}(q_1).\mathbf{A}_{12}(q_2). \ \dots \mathbf{A}_{n-1,n}(q_n) \tag{2-28}$$

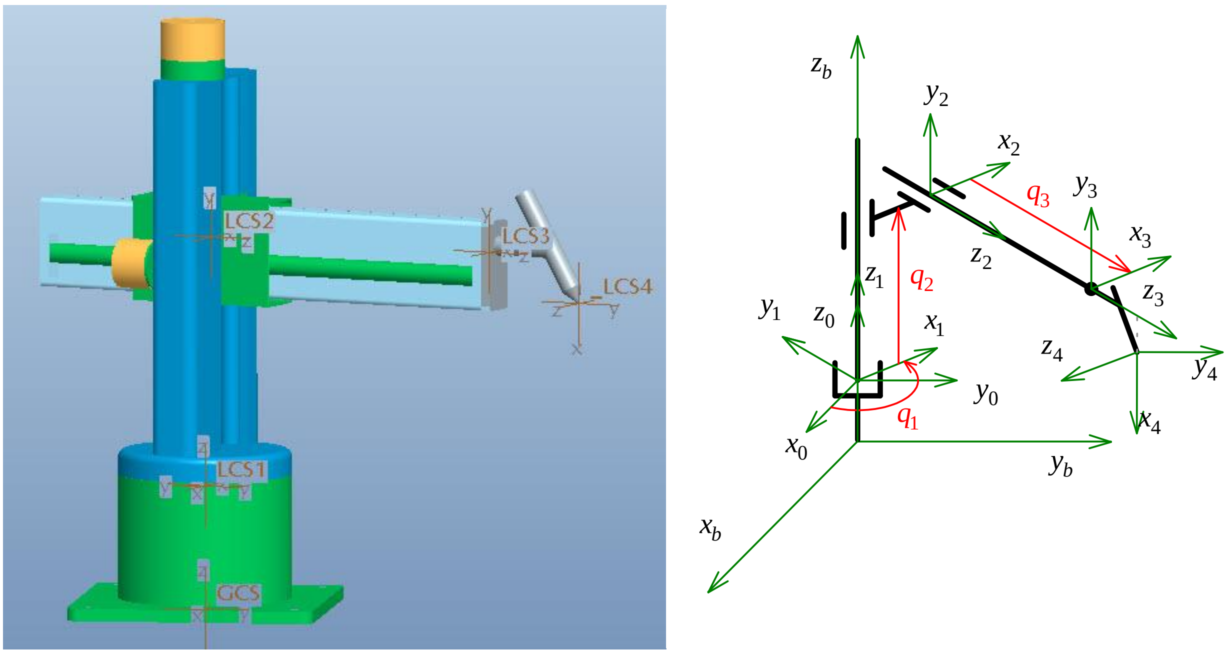
Příklad 2-6 Řešení přímé úlohy pro mechanismus RTT s obecně natočenou hlavicí

Manipulátor s kinematickou strukturou RTT dle Obr. 2-11 vlevo. Kinematická struktura a rozmístění souřadných systémů dle Denavit-Hartenbergova principu je na tomto obrázku vpravo. Problém tohoto příkladu je obecně natočená technologická hlavice, kterou musíme zahrnout do výpočtů koncové polohy hlavice při řešení přímé úlohy kinematiky. Při řešení této úlohy je k dispozici několik možností:

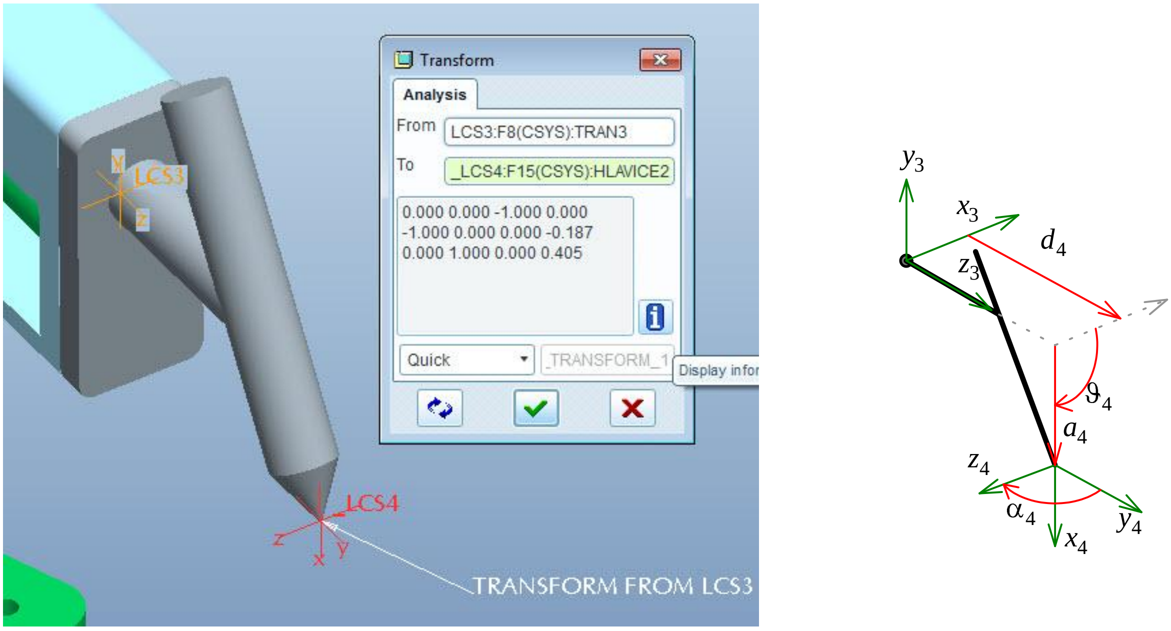
1. jako poslední souřadný systém ponechat lokální souřadný systém LCS_3 a polohu koncového bodu a směry důležité pro pohyb hlavice počítat s využitím výrazu (2-27)

2. Použít čtvrtý lokální souřadný systém LCS_4 spojený s hlavicí, jak je ukázáno na Obr. 2-11, doplnit čtvrtou konstantní transformační matici a ve výpočtu přímé úlohy kinematiky počítat polohu počátku lokálního souřadného systému LCS_4 a směry jeho os. Lokální souřadný systém je přitom umístěn a orientován podle pravidel Denavit-Hartenberga, což sice umožní automatizované sestavení transformační matice dosazením příslušné čtveřice parametrů do výrazu (2-21), na druhé straně ale tento postup vede k nepříliš vhodné orientaci os posledního souřadného systému hlavice. Zobrazení takto vytvořeného LCS_4 a znázornění odečtu Denavit-Hartenbergových paramentrů je uvedeno na Obr. 2-12.

3. Nejlepší možností je umístění lokálního souřadného systému bez využití Denavit-Hartenbergových pravidel, umístit počátek tohoto souřadného systému do koncového bodu technologické hlavice (do středu mezi prsty chapadla, popř. do jiného významného bodu z hlediska polohování) a nasměrovat vhodně jeho osy, tak aby odpovídaly důležitým směrům při pohybu hlacice. Umístění je ukázáno na Obr. 2-13. Pak může následovat přímé určení transformační matice $\mathbf{A}_{34}$ postupem z příkladu 2-2.



Obr. 2-11



Obr. 2-12

Pro postup dle bodu 2 a i dle bodu 3 je další postup identický, liší se vlastně jen způsobem výpočtu transformační matice $\mathbf{A}_{34}$. Jednotlivé dílčí matice jsou vynásobeny, vypočtena je celková transformační matice $\mathbf{T}_{b4}(t)$ ve tvaru

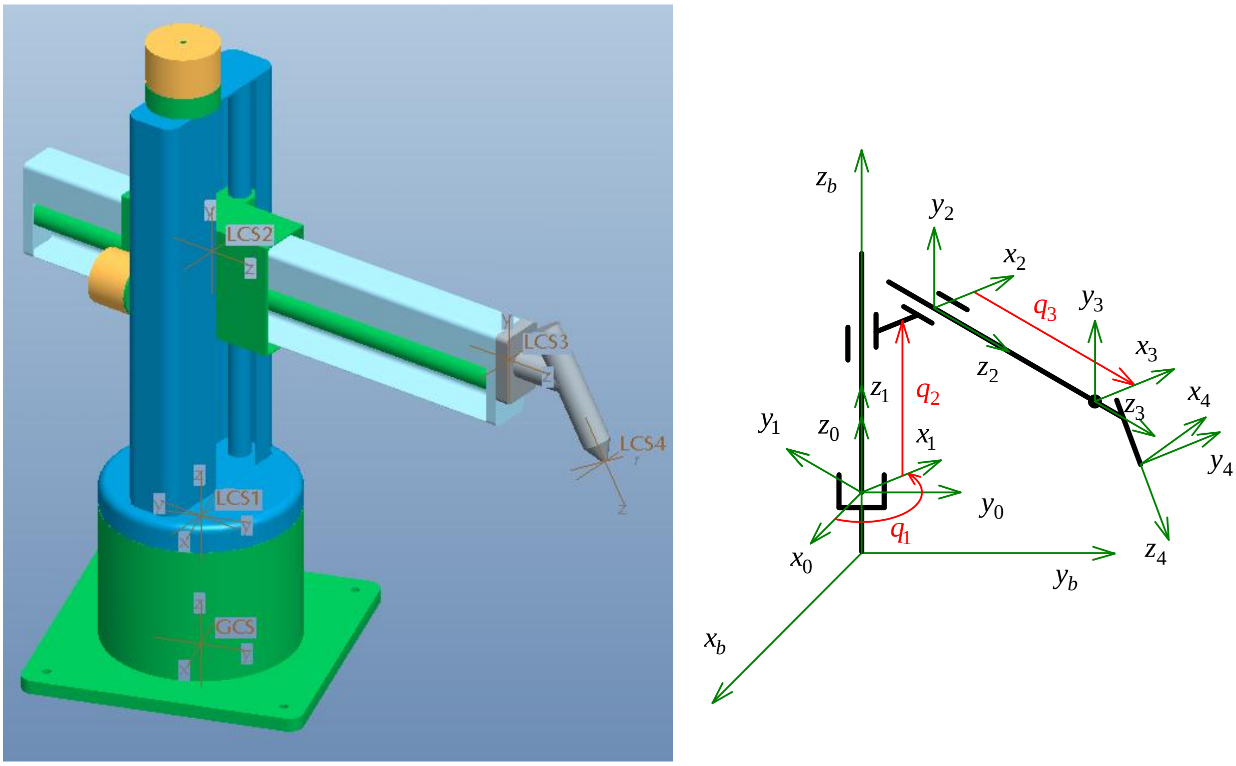
$$T_{b4}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0.866\cdot\sin(q_1(t)) & 0.5\cdot\sin(q_1(t)) & 0.065\cdot\cos(q_1(t)) + 0.405\cdot\sin(q_1(t)) + q_3(t)\cdot\sin(q_1(t)) \\ \sin(q_1(t)) & -0.866\cdot\cos(q_1(t)) & -0.5\cdot\cos(q_1(t)) & 0.065\cdot\sin(q_1(t)) + -0.405\cdot\cos(q_1(t)) - q_3(t)\cdot\cos(q_1(t)) \\ 0 & 0.5 & -0.866 & q_2(t) + 0.313 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a po jejím vyčíslení pro čas t = 0

$$T_{b4}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 1.905 \\ 0 & 0.5 & -0.866 & 1.213 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Celý výpočet v prostředí Mathcadu je na Mathcad\RTT_hlavice_prima_uloha.xmcd

Prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer) na Mathcad\RTT_hlavice_prima_uloha.html



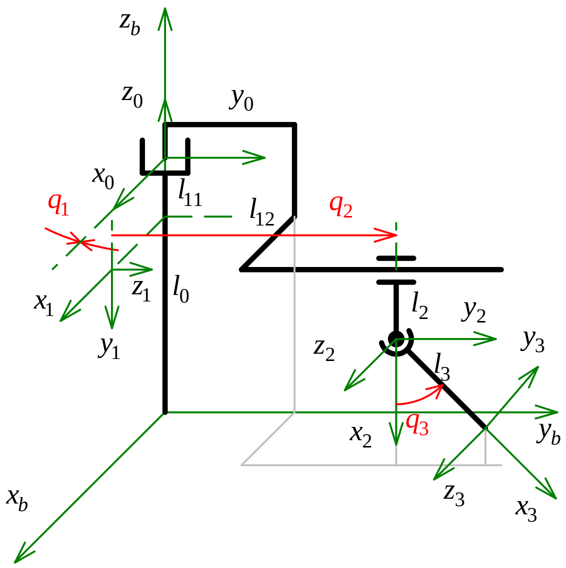
Obr. 2-13

Komentovaný výpočet je také ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_hlavice_prima_uloha\RTT_hlavice_prima_uloha.mp4

Příklad 2-7 Metodika rozmístění lokálních souřadných systémů

Manipulátor s kinematickou strukturou RTR dle Obr. 2-14 je tvořen rotační jednotkou, prostorově zalomenou klikou, tvořící článek 1, dále translační a rotační jednotkou. Parametry transformačních matic jsou uvedeny v Tab. 2-3. Při stanovení parametrů je potřeba si uvědomit, že parametr d_1 má záporné znaménko, protože kladný směr je zde dán směrem osy z_0 a osa x_1 je pod osou x_0, tedy v záporném směru.



Obr. 2-14

Tab. 2-3

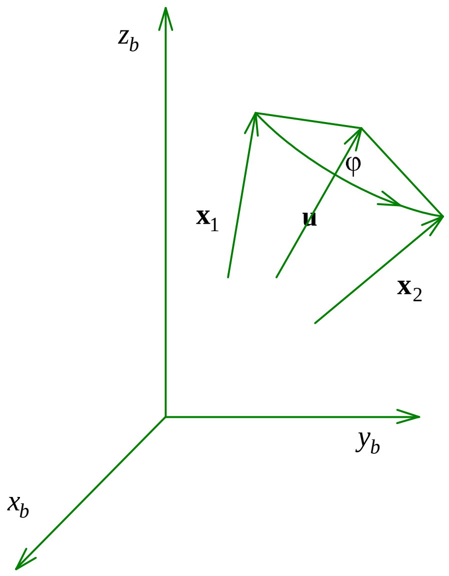
i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
0	0	l_0	0	0
1	q_1	$-l_{11}$	l_{12}	$-\pi / 2$
2	$\pi / 2$	q_2	l_2	$\pi / 2$
3	q_3	0	l_3	0

Při kreslení kinematické struktury mechanismu je někdy obtížné najít vhodnou čárovou reprezentaci skutečných článků. Jedná se zde zejména o reprezentaci vnějších rozměrů mechanismu a typů jeho kinematických dvojic. Jednodušší přímé články se nahrazují přímou, popř. lomenou čarou (klikou), u složitějších prostorových objektů je možno použít tzv. střednici (spojnice těžišť ploch příčných řezů článku). Pro kinematický model jsou podstatné vzájemné polohy lokálních souřadných systémů a na grafickém vyjádření vnějších rozměrů článků vlastně nezáleží. Počátky lokálních souřadných systémů jsou dány vzájemnou polohou os pohybu kinematických dvojic (osy z) a jak už bylo uvedeno, pro rotační vazby jsou počátky umístěny ve středu vazby (tedy např. mezi ložisky), pro translační vazby je nutno začít umisťovat souřadné systémy současně od koncového bodu a při dodržení principu, že osa x_i vždy protíná předchozí osu z_{i-1}, lze najít správné umístění souřadných systémů. Jak je vidět i z Obr. 2-14, lokální souřadný systém článku 1 je např. umístěn zcela mimo vlastní článek.

2.5 Rodrigův vztah

Transformační matice mezi libovolným lokálním souřadným systémem a základním souřadným systémem vznikne jako součin transformačních matic mezi sousedními souřadnými systémy. Tato operace sebou nese značné množství operací násobení a sčítání, které trvají relativně dlouho a navíc mohou vnést do výpočtu chybu danou omezenou přesností vstupních dat. U systémů, kde je třeba tyto operace vykonávat velmi často a v reálném čase (řídicí systémy), je vhodnější využít tzv. Rodrigův vztah, kdy jsou jednotlivé sloupce transformačních matic vypočteny na základě vektorových operací a

Denavit-Hartenbergových parametrů. Výpočet je rychlejší a přesnější. Obecný Rodrigův vztah (při použití klasických vektorových operátorů a ortogonálních souřadnic) umožňuje výpočet souřadnic vektoru $\mathbf{x}_2$, který vznikne otočením vektoru $\mathbf{x}_1$ kolem vektoru $\mathbf{u}$ o úhel φ dle Obr. 2-15. Je nutno podotknout, že následující výrazy jsou zapsány v klasickém vektorovém počtu se třemi souřadnicemi vektorů.



Obr. 2-15

$$\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1.\cos\varphi + \ \mathbf{u}\times\mathbf{x}_1\ .\sin\varphi + \mathbf{u}.\ \mathbf{u}.\mathbf{x}_1\ .\ 1-\cos\varphi \tag{2-29}$$

Uvedený vztah je možno aplikovat na Obr. 2-7, na základě kterého byly odvozeny Denavit-Hartenbergovy parametry. Jednotkový vektor $\mathbf{i}_{i-1}$ otočíme kolem osy otáčení $\mathbf{k}_{i-1}$ o úhel ϑ_i a dostaneme směr vektoru $\mathbf{i}_i$

$$\mathbf{i}_i = \mathbf{i}_{i-1}.\cos\vartheta_i + \ \mathbf{k}_{i-1}\times\mathbf{i}_{i-1}\ .\sin\vartheta_i \tag{2-30}$$

Jednotkový vektor $\mathbf{k}_{i-1}$ otočíme kolem osy otáčení $\mathbf{i}_i$ o úhel α_i a dostaneme směr vektoru $\mathbf{k}_i$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_{i-1}.\cos\alpha_i + \ \mathbf{i}_i\times\mathbf{k}_{i-1}\ .\sin\alpha_i \tag{2-31}$$

Směr vektoru $\mathbf{j}_i$ dopočteme na základě definice ortogonálního souřadného systému

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{k}_i\times\mathbf{i}_i \tag{2-32}$$

Poslední sloupec (vektor počátku souřadného systému) příslušné transformační matice je vypočten na základě Denavit-Hartenbergových parametrů, které udávají posunutí

$$\mathbf{p}_{i-1}^{i} = d_i.\mathbf{k}_{i-1} + a_i.\mathbf{i}_i \tag{2-33}$$

$$\mathbf{p}_b^{i} = \sum_{i=0}^{i} d_i.\mathbf{k}_{i-1} + a_i.\mathbf{i}_i \tag{2-34}$$

$$\mathbf{p}_i^{n} = \mathbf{p}_b^{n} - \mathbf{p}_b^{i} \tag{2-35}$$

2.6 Přímá úloha kinematiky pro určení rychlosti koncového bodu

Pro přepočet souřadnic bodu **P** vyjádřeného v *i*-tém lokálním souřadném systému LCS_i do základního souřadného systému *GCS* platí maticový transformační vztah

$$\mathbf{P} = \mathbf{T}_{bi}.(\mathbf{P})_i \tag{2-36}$$

Přitom uvažujeme, že souřadnice bodu **P** jsou v LCS_i konstantní. Pro zjištění rychlosti bodu P v základním souřadném systému *GCS* provedeme derivaci levé i pravé strany maticové rovnice podle času, při uvážení, že na pravé straně se jedná o součin, a dostaneme vztah

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d(\mathbf{T}_{bi})}{dt}.(\mathbf{P})_i + \mathbf{T}_{bi}.\frac{d(\mathbf{P})_i}{dt} \tag{2-37}$$

Derivace matice podle nějaké proměnné se provede tak, že se derivuje každý prvek matice podle této proměnné. Pro levou stranu rovnice tedy dostaneme

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ \frac{d(1)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{v} \tag{2-38}$$

což znamená vektor translační rychlosti bodu **P** v základním souřadném systému *GCS*. Vyjádření derivace v čase pravé strany rovnice je složitější, protože musíme uvážit, že homogenní transformační matice $\mathbf{T}_{bi}$ je funkcí více proměnných a to zobecněných souřadnic $q_1(t), q_2(t), \cdots, q_i(t)$, které jsou navíc funkcí času, a jedná se tedy o totální diferenciál složené funkce více proměnných. Nejprve upřesníme druhý člen na pravé straně rovnice. Jelikož souřadnice bodu **P** v jeho lokálním souřadném systému jsou konstantní (pohyb bodu je způsoben změnou zobecněných souřadnic $q_1, q_2, \cdots, q_i$) je i derivace jeho souřadnic v LCS_i rovna nule a tento člen odpadá. Nositelem rychlosti bodu **P** je tedy totální diferenciál homogenní transformační matice $\mathbf{T}_{bi}$

$$\frac{d\mathbf{T}_{bi}}{dt} = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j}.\frac{dq_j}{dt} \tag{2-39}$$

Parciální derivace transformační matice $\mathbf{T}_{bi}$ podle příslušné zobecněné souřadnice se vypočte jako

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j} = \mathbf{A}_{b0}.\mathbf{A}_{01}(q_1). \cdots .\frac{\partial \mathbf{A}_{j-1,j}(q_j)}{\partial q_j}. \cdots .\mathbf{A}_{i-1,i}(q_i) \tag{2-40}$$

Jelikož homogenní transformační matice mezi dvěma sousedními *LCS* sestává ze čtyř dílčích transformačních matic

$$\mathbf{A}_{j-1,j} = \mathbf{A}_{z_{j-1},\vartheta_j}.\mathbf{A}_{z_{j-1},d_j}.\mathbf{A}_{x_j,a_j}.\mathbf{A}_{x_j,\alpha_j} \tag{2-41}$$

z nichž jenom první dvě mohou obsahovat proměnnou, musíme uvážit typ pohybové jednotky a tím tedy i proměnou, podle které je prováděna parciální derivace. Tak například pro rotační kinematickou dvojici bude parciální derivace provedena podle proměnné ϑ_j

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{j-1,j}}{\partial \vartheta_j} = \frac{\partial \mathbf{A}_{z_{j-1},\,\vartheta_j}}{\partial \vartheta_j}.\ \mathbf{A}_{z_{j-1},\,d_j}.\ \mathbf{A}_{x_j,\,a_j}.\ \mathbf{A}_{x_j,\,\alpha_j} \tag{2-42}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{z_{j-1},\,\vartheta_j}}{\partial \vartheta_j} = \frac{\partial}{\partial \vartheta_j}\begin{bmatrix} \cos\vartheta_j & -\sin\vartheta_j & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_j & \cos\vartheta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\vartheta_j & -\cos\vartheta_j & 0 & 0 \\ \cos\vartheta_j & -\sin\vartheta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\vartheta_j & -\sin\vartheta_j & 0 & 0 \\ \sin\vartheta_j & \cos\vartheta_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{z_{j-1},\,\vartheta_j}.\mathbf{D}_R = \mathbf{D}_R.\,\mathbf{A}_{z_{j-1},\vartheta_j} \tag{2-43}$$

Z provedené derivace ve vztahu je zřejmé, že derivaci dílčí transformační matice je možno provést vynásobením této matice zvláštní maticí $\mathbf{D}_R$, která se nazývá diferenciální operátor rotace, přitom nezáleží na tom, násobíme-li zprava nebo zleva. Obdobně platí, že parciální derivaci dílčí transformační matice v případě translace je možno provést vynásobením diferenciálním operátorem translace $\mathbf{D}_T$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{z_{j-1},\,d_j}}{\partial d_j} = \mathbf{A}_{z_{j-1},\,d_j}.\ \mathbf{D}_T = \mathbf{D}_T.\ \mathbf{A}_{z_{j-1},\,d_j} \tag{2-44}$$

kde $\mathbf{D}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2-45)

Parciální derivaci transformační matice pak lze realizovat pomocí příslušného diferenciálního operátoru podle toho, zda se jedná o translaci nebo rotaci

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{j-1,j}}{\partial \vartheta_j} = \mathbf{D}_R.\mathbf{A}_{\vartheta_j}.\mathbf{A}_{d_j}.\mathbf{A}_{a_j}.\mathbf{A}_{\alpha_j} = \mathbf{D}_R.\mathbf{A}_{j-1,j} \tag{2-46}$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{j-1,j}}{\partial d_j} = \mathbf{A}_{\vartheta_j}.\mathbf{D}_T.\mathbf{A}_{d_j}.\mathbf{A}_{a_j}.\mathbf{A}_{\alpha_j} = \underbrace{\mathbf{A}_{\vartheta_j}.\mathbf{D}_T.\mathbf{A}_{\vartheta_j}^{-1}}_{\mathbf{D}_T}\ .\ \underbrace{\mathbf{A}_{\vartheta_j}.\mathbf{A}_{d_j}.\mathbf{A}_{a_j}.\mathbf{A}_{\alpha_j}}_{\mathbf{A}_{j-1,j}} = \mathbf{D}_T.\mathbf{A}_{j-1,j} \tag{2-47}$$

Vektor rychlosti bodu $\mathbf{P}\ _i$, vyjádřeného v *i*-tém lokálním souřadném systému se vypočte jako totální diferenciál homogenní transformační matice $\mathbf{T}_{bi}\ \mathbf{q}\ t$ vzhledem k času *t*, násobený souřadnicemi tohoto bodu v příslušném lokálním souřadném systému.

$$\mathbf{v}_{\mathbf{P}i} = \left(\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j}.\frac{dq_j}{dt} \right).\ \mathbf{P}_i\ _i \tag{2-48}$$

Parciální derivace jsou realizovány pomocí násobení diferenciálním operátorem $\mathbf{D}_R$ popř. $\mathbf{D}_T$, podle typu kinematické dvojice. Např. rychlost počátku LCS_3 pro rotační první kinematickou dvojici a translační druhou a třetí kinematickou dvojici se vypočte jako

$$\mathbf{v}_{O3} = \left[\mathbf{A}_{b0}.\mathbf{D}_R.\mathbf{A}_{01}.\mathbf{A}_{12}.\mathbf{A}_{23}.dq_1 + \mathbf{A}_{b0}.\mathbf{A}_{01}.\mathbf{D}_T.\mathbf{A}_{12}.\mathbf{A}_{23}.dq_2 + \mathbf{A}_{b0}.\mathbf{A}_{01}.\mathbf{A}_{12}.\mathbf{D}_T.\mathbf{A}_{23}.dq_3\right] . \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2-49}$$

kde dq_1, dq_2, dq_3 jsou rychlosti pohybu jednotlivých kinematických dvojic a $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ jsou souřadnice počátku LCS_3 (bodu, proto je čtvrtá souřadnice 1), vyjádřeného v LCS_3. Výhodou použití diferenciálních operátorů na místě parciální derivace je opět snadné programování úlohy, kdy nesnadno programovatelná úloha parciální derivace složitých trigonometrických výrazů je nahrazena rutinní operací násobení matic. Vždy je ale nutno použít příslušný diferenciální operátor podle typu kinematické dvojice.

Komentovaný výpočet je také ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_hlavice_prima_uloha\RTT_hlavice_prima_uloha_rychlost.mp4

Shrnutí kapitoly

V této kapitole byl popsán způsob řešení přímé úlohy kinematiky – tedy úlohy, kdy jsou známy jednotlivé kloubové proměnné (zobecněné souřadnice) natočení a posunutí jednotlivých článků a hledána je poloha koncového bodu manipulátoru, popř. technologické hlavice a směry natočení posledního článku, rep. technologické hlavice. Postup je následující

1. Rozmístění lokálních souřadných systémů na jednotlivé články mechanismu podle pravidel Denavit-Hartenberga (popř. v případě obecně natočené hlavice je vhodnější orientovat lokální souřadný systém ručně).
2. Stanovení čtveřic Denavit-Hartenbergových parametrů (v případě ručně umístěného lokálního souřadného systému určit transformační matici v CAD systému).
3. Dosazení čtveřic D-H parametrů do univerzálního vyjádření transformační matice mezi sousedními souřadnými systémy.
4. Vynásobení transformačních matic a výpočet celkové transformační matice.
5. První tři sloupce celkové transformační matice mezi základním souřadným systémem a posledním souřadným systémem určují směr os posledního souřadného systému a poslední sloupec celkové transformační matice určuje polohu koncového bodu.
6. S využitím diferenciálního vyjádření transformační matice je rovněž vypočtena rychlost koncového bodu při známých rychlostech jednotlivých kloubů. Pro výpočet derivace jednotlivých transformačních matic je s výhodou využito diferenciálních operátorů.

Otázky

1. Kolik stupňů volnosti má těleso v prostoru?
2. Jak souvisí počet stupňů volnosti koncového zařízení s počtem kloubových proměnných?
3. Popiste postup řešení přímé úlohy kinematiky.

3 INVERZNÍ ÚLOHA KINEMATIKY

Čas ke studiu: 4 hodiny

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- vypočítat průběh kloubových promenných (zobecněných souřadnic) jednotlivých kinematických dvojic při známém průběhu polohy a orientace koncového bodu robotu.

Výklad

Inverzní transformace komplexního vektoru polohy $\mathbf{w}$ na vektor obecné souřadnice $\mathbf{q}$, jehož složky jsou zobecnělé souřadnice (zobecněné souřadnice) natočení nebo posuvu jednotlivých kinematických dvojic, je základním výpočtem kinematiky mechanismů a je nezbytná pro účely polohování jednotlivých článků mechanismu. Zatímco výpočet přímé transformace vektoru polohy $\mathbf{p}$ a vektoru orientace $\mathbf{o}$ je při známé transformační matici $\mathbf{T}_{bn}$ jednoduchý, výpočet inverzní úlohy kinematiky

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{o} \end{bmatrix} \xrightarrow{inv.trans.} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \tag{3-1}$$

je relativně komplikovaná úloha. Základním kritériem, kterým je možno hodnotit metody inverzní transformace je jejich univerzálnost, tj. použití stejného algoritmu pro libovolnou kinematickou strukturu a počet stupňů volnosti mechanismu. Univerzální metody jsou aplikovány zejména u velkých CAD systémů, kdy programový systém musí zvládnout inverzní kinematickou úlohu libovolné kinematické struktury. Pro aplikace v oblasti řízení je rychlost výpočtu rozhodující, protože řešení inverzní úlohy probíhá v ideálním případě v reálném čase. Obecný přehled metod inverzní transformace z hlediska jejich principu je ukázán na Obr. 3-1.

Metody řešení inverzní úlohy
- vektorová metoda
  - konkrétní kin. struktura
  -
  - univerzální metody
- numerické metody
  - numerické řešení soustavy transcendentních rovnic
  - aproximační
  - optimalizační
    - heuristické
    - gradientní

Obr. 3-1

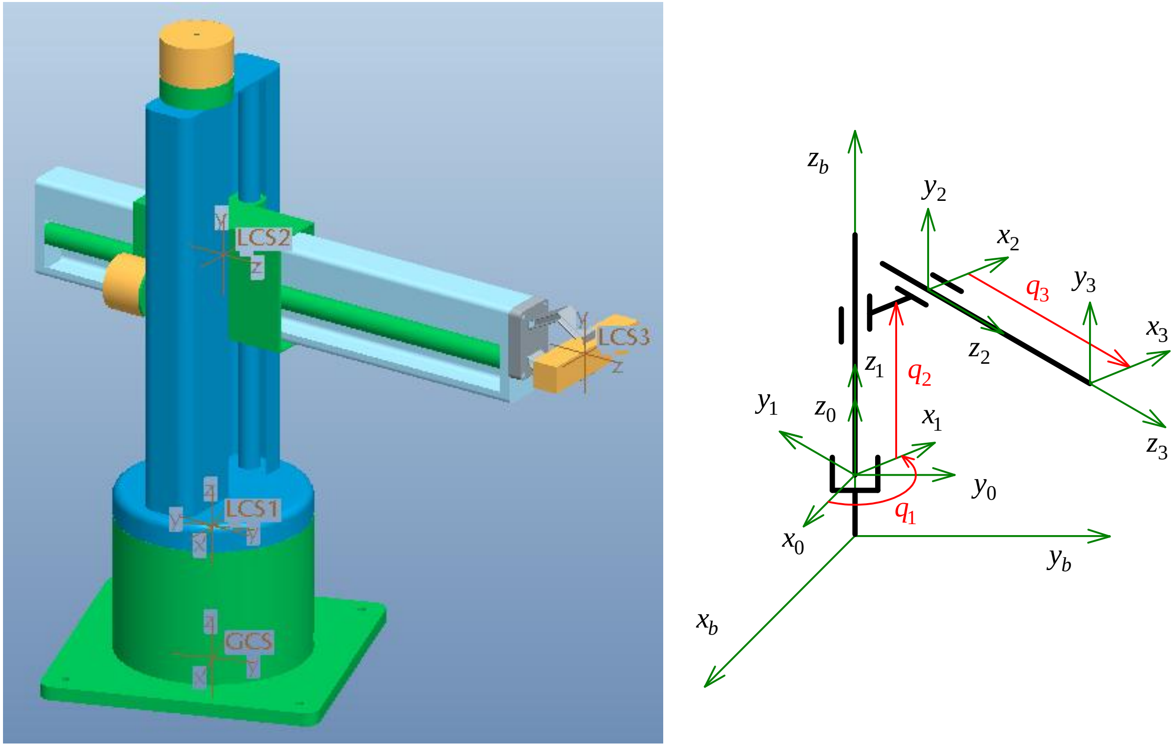
Použití uvedených numerických metod je bezproblémové u mechanismů s otevřenou kinematickou strukturou, u kinematických struktur s jednoduchými smyčkami se dají tyto metody v řadě případů použít přímo, popř. po úpravách. Složitější kinematické struktury se smyčkami je nutno řešit dle metodiky (Brát, 1981).

3.1 Numerické řešení soustavy transcendentních rovnic

Přepočet souřadnic koncového bodu na zobecněné souřadnice jednotlivých pohybových jednotek vede k řešení soustavy rovnic, které jsou vzhledem k použití rotačních kloubů transcendentní. Řešení takovéto soustavy rovnic je možno provést vhodnými programovými moduly, jako je Mathcad a Matlab. Příklad použití Mathcadu je uveden v příkladu 3.1, Matlabu v příkladu 3.2.

Příklad 3-1 Numerické řešení invernzní úlohy kinematiky v prostředí Matcad

Manipulátor s kinematickou strukturou RTT z příkladu 2-5. Kinematická struktura a rozmístění souřadných systémů dle Denavit-Hartenbergova principu je znovu uvedeno na Obr. 3-2, parametry transformačních matic jsou uvedeny v Tab. 3-1. Pro danou kinematickou strukturu je provedeno řešení inverzní úlohy kinematiky metodou numerického řešení soustavy transcendentních rovnic (Matlab).



Obr. 3-2

Rozměry manipulátoru jsou

$l_0 := 0.25$

$l_2 := 0.065$

Tab. 3-1

i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
0	0	l_0	0	0
1	q_1	0	0	0
2	0	q_2	l_2	$\pi / 2$
3	0	q_3	0	0

Zadána je trajektorie koncového bodu manipulátoru ve formě parametrických rovnic, čas je parametr v rozsahu

$t := 0, 0.5 .. 3$

Parametry pohybu koncového bodu – počáteční poloha, rychlost a zrychlení.

$a_x := -0.20 \qquad v_{x0} := 0 \qquad x_0 := 1.0$

$a_y := 0.20 \qquad v_{y0} := 0 \qquad y_0 := 0.3$

$a_z := 0.10 \qquad v_{z0} := 0 \qquad z_0 := 1.0$

Koncový bod se bude pohybovat po přímce rovnoměrně zrychleným pohybem

$$x(t) := x_0 + v_{x0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2$$

$$y(t) := y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2$$

$$z(t) := z_0 + v_{z0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_z \cdot t^2$$

Pro sestavení soustavy rovnic určujících vztah mezi vektorem kloubových proměnných a vektorem polohy koncového bodu je nutno nejprve sestavit jednotlivé transformační matice. Protože většina numerických metod vyžaduje pro úspěšné řešení znalost řešení alespoň v jednom výchozím bodu, zvolíme následující hodnoty kloubových proměnných. V případě skutečného robotu a jeho řídicího systému je najetí do výchozí polohy zajištěno rutinou zvanou „domácí poloha (home position)“, která je zajištěna technicky pomocí senzorů polohy. Pro řešení inverzní úlohy jsou nejprve použity na místě kloubových proměnných proměnné s_1, s_2, s_3.

$s_1 := 1.8 \qquad s_2 := 0.8 \qquad s_3 := 1.1$

Tyto hodnoty je možno operativně měnit podle výsledků přímé úlohy, tak aby souřadnice koncového bodu odpovídaly alespoň přibližně požadovanému průběhu ve výchozím bodu. Transformační matice mezi sousedními lokálními souřadnými systémy jsou

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01}(t) := \begin{pmatrix} \cos\left(s_1\right) & -\sin\left(s_1\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(s_1\right) & \cos\left(s_1\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Po jejich symbolickém vynásobení (Mathcad) dostaneme celkovou transformační matici mezi základním souřadným systémem a posledním lokálním souřadným systémem, jehož počátek je koncovým bodem manipulátoru a jehož souřadnice jsou dány posledním sloupcem celkové transformační matice

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & 0 & \sin(s_1) & \sin(s_1)\cdot s_3 + \cos(s_1)\cdot l_2 \\ \sin(s_1) & 0 & -\cos(s_1) & -\cos(s_1)\cdot s_3 + \sin(s_1)\cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} = \begin{pmatrix} -0.227 & 0 & 0.974 & 1.056 \\ 0.974 & 0 & 0.227 & 0.313 \\ 0 & 1 & 0 & 1.05 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nyní může být sestavena soustava rovnic pro řešení inverzní kinematické úlohy využitím posledního sloupce celkové transformační matice, který udává souřadnice *x y z* koncového bodu. V našem případě se nejedná o přepočet jedné polohy, ale celého časového průběhu polohy koncového bodu, tak jak byl zadán v zadání příkladu. Pro řešení této soustavy rovnic, která je transcendentní, je využit řešič Mathcadu, který řeší soustavu s využitím upravené Levenberg-Marquardtovy metody (Polak, E. 1997). Rovnice řešené soustavy se musí umístit mezi klíčová slova Given (Dáno) a funkci Find (Najdi), která obsahuje výsledky. Pro správné řešení je ještě nutno zkontrolovat tzv. „první odhad řešení“, který je dán stanovením výchozích hodnot s_1 až s_3 a porovnáním hodnot souřadnic *x y z* z číselného vyjádření celkové transformační matice a počátečních hodnot požadovaných časových průběhů. Pokud je shoda dobrá, je možno přistoupit k řešení.

Given

$$s_3\cdot\sin(s_1) + l_2\cdot\cos(s_1) = x$$

$$l_2\cdot\sin(s_1) - s_3\cdot\cos(s_1) = y$$

$$s_2 + l_0 = z$$

$$Q(x,y,z) := \mathrm{Find}(s_1, s_2, s_3)$$

Na levé straně rovnic jsou symbolické výrazy z posledního sloupce celkové transformační matice, na pravé straně souřadnice koncového bodu. Soustava rovnic vlastně definuje novou funkci Q(x,y,z), která je funkcí proměnných *x, y, z* a přepočítá souřadnice koncového bodu na jednotlivé zobecněné souřadnice (kloubové proměnné) pro jeden bod. Pro výpočet celého časového průběhu kloubových proměnných využijeme tuto funkci tak, že za jednotlivé proměnné dosadíme jejich časové průběhy, tedy $x(t), y(t), z(t)$ a zároveň extrahujeme průběhy jednotlivých zobecněných souřadnic do vlastních kloubových proměnných $q_1(t)$ až $q_3(t)$. Možnost používání časových průběhů na místě proměnných funkcí je jedna z velkých výhod matematického výpočetního programu Mathcad.

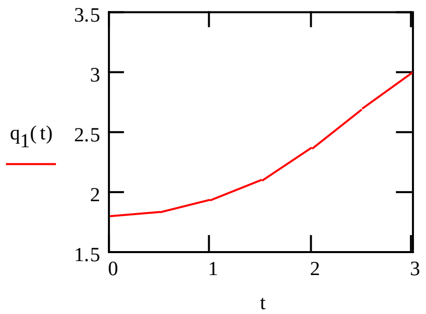
$q_1(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{1,1}$

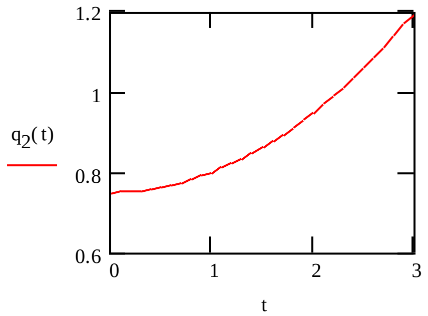
$q_2(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{2,1}$

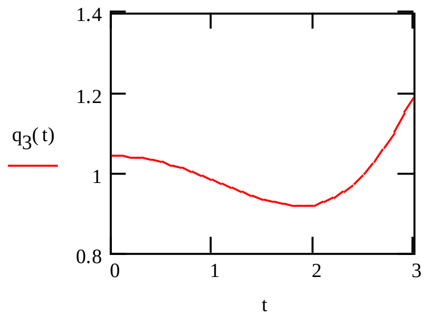
$q_3(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{3,1}$

Časové průběhy zobecněných souřadnic je možno ukázat číselně nebo graficky

$q_1(t) =$	$q_2(t) =$	$q_3(t) =$
1.8	0.75	1.042
1.829	0.763	1.026
1.923	0.8	0.983
2.097	0.863	0.934
2.362	0.95	0.92
2.691	1.063	0.996
3.004	1.2	1.202



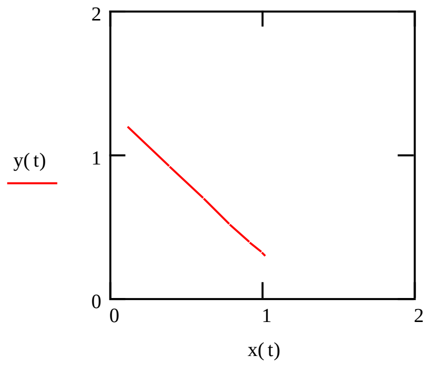


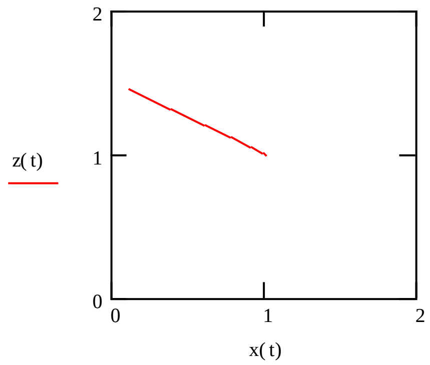


Správnost řešení je vhodné ověřit dosazením časových průběhů zobecněných souřadnic do symbolických výrazů v posledním sloupci celkové transformační matice a jejich porovnáním s požadovanými průběhy souřadnic koncového bodu).

$\sin(q_1(t))\cdot q_3(t) + \cos(q_1(t))\cdot l_2$	$x(t) =$	$-\cos(q_1(t))\cdot q_3(t) + \sin(q_1(t))\cdot l_2$	$y(t) =$	$q_2(t) + l_0 =$	$z(t) =$
1	1	0.3	0.3	1	1
0.975	0.975	0.325	0.325	1.012	1.012
0.9	0.9	0.4	0.4	1.05	1.05
0.775	0.775	0.525	0.525	1.113	1.113
0.6	0.6	0.7	0.7	1.2	1.2
0.375	0.375	0.925	0.925	1.313	1.313
0.1	0.1	1.2	1.2	1.45	1.45

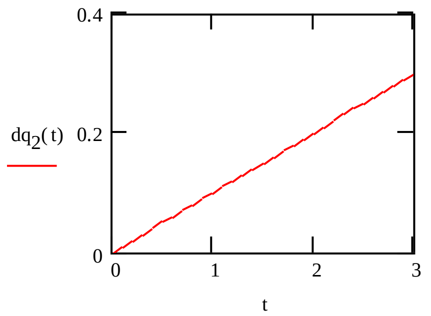
a také grafickým znázorněním v rovinách *xy* , *xz* a také ve 3D, kde je vidět přímkový průběh trajektorie koncového bodu.

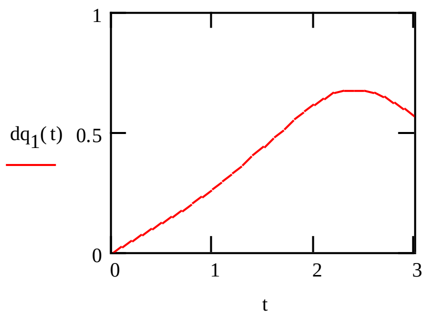




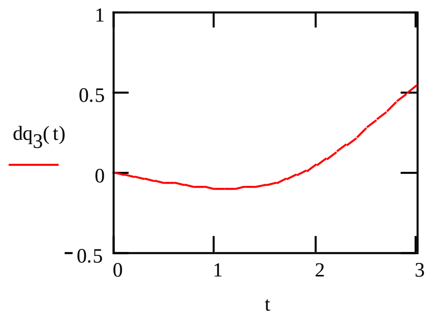
Na základě časových průběhů zobecněných souřadnic je možné jejich numerickou derivací (Mathcad) vypočíst další veličiny, které jsou nutné pro následnou dynamickou analýzu mechanismu a to jsou zejména rychlosti a zrychlení jednotlivých pohybových jednotek.

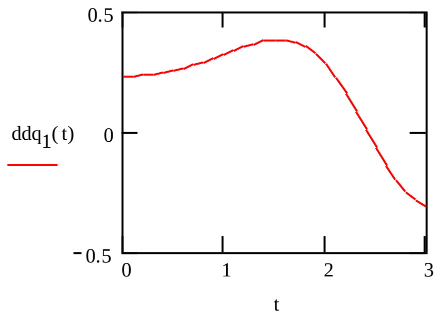
$dq_1(t) := \frac{d}{dt} q_1(t)$ $\qquad$ $dq_2(t) := \frac{d}{dt} q_2(t)$



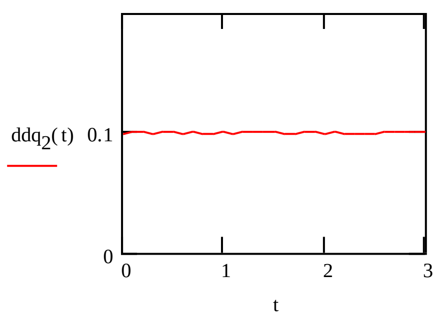


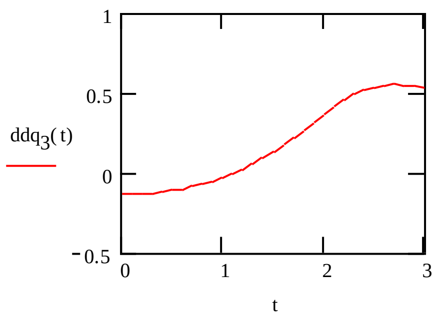
$dq_3(t) := \frac{d}{dt} q_3(t)$ $\qquad$ $ddq_1(t) := \frac{d}{dt} dq_1(t)$

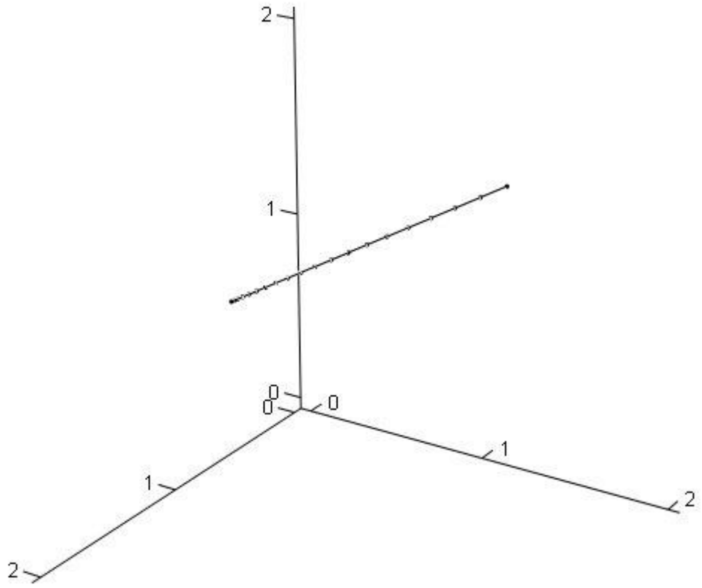




$ddq_2(t) := \frac{d}{dt} dq_2(t)$ $\qquad$ $ddq_3(t) := \frac{d}{dt} dq_3(t)$





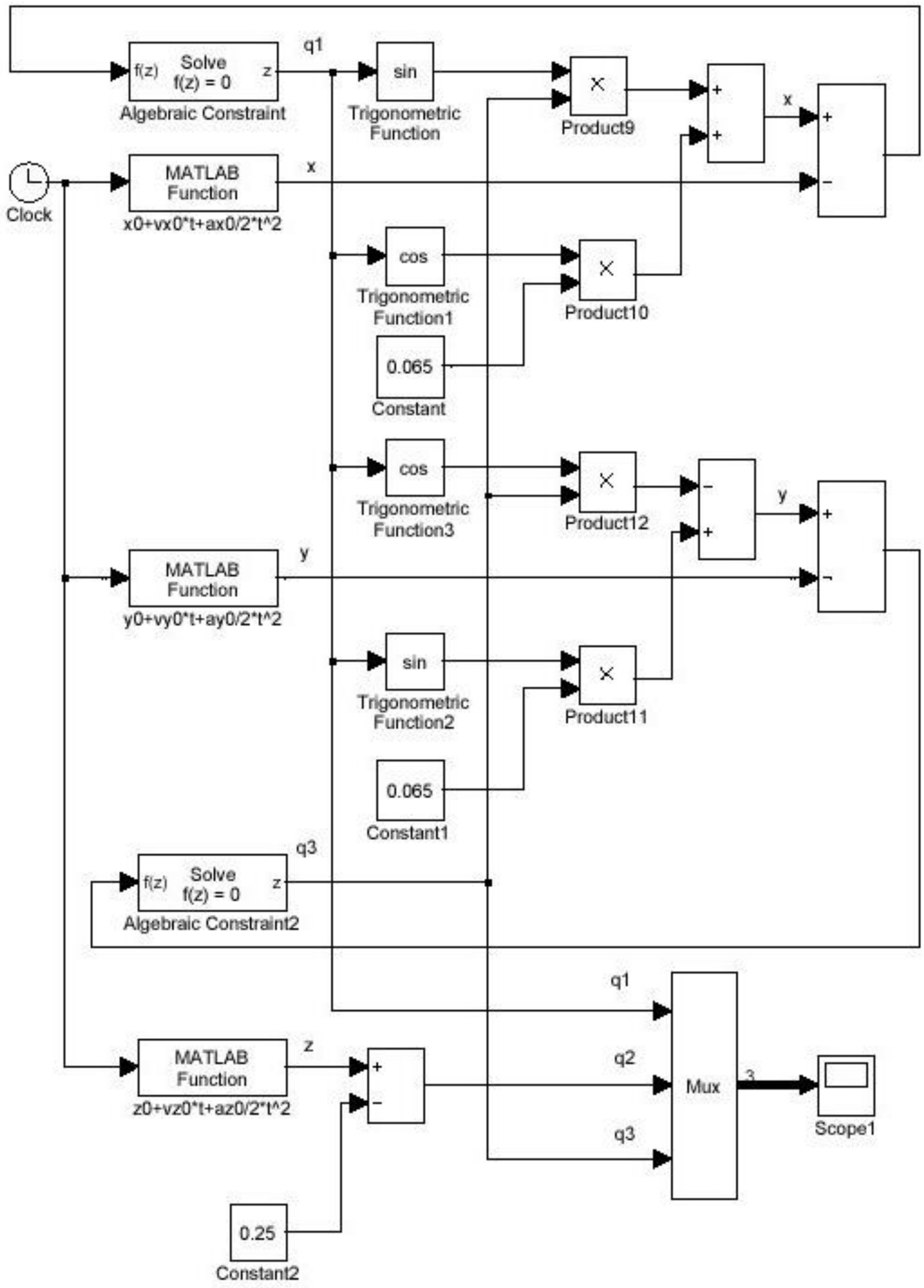


Příklad 3-2 Řešení inverzní úlohy kinematiky v prostředí Matlab/Simulink

Pro řešení inverzní úlohy kinematiky se ukazuje zajímavá možnost využití simulačního softwaru Matlab/Simulink. Výhodou tohoto použití je, že inverzní úloha kinematiky je řešena přímo v prostředí simulace celého systému, což je výhodné zejména vzhledem k možnosti doplnění řídících bloků, pohonů apod.

Pro řešení je použito bloku „Algebraická podmínka (Algebraic Constraint)“. Tento speciální blok nastaví takovou výstupní hodnotu proměnné z, aby vstupní hodnota bloku s algebraickou podmínkou byla nulová. Výstup tohoto bloku musí ovlivňovat vstup přes libovolnou zpětnovazební smyčku. Řešič opět používá tzv. počáteční odhad, jehož správná hodnota ovlivňuje efektivnost výpočtu algebraické smyčky s podmínkou.

Blokové schéma řešení úlohy je ukázáno na Obr. 3-3.



Obr. 3-3

3.2 Aproximační metody inverzní transformace

Homogenní transformační matice mezi základním souřadným systémem a souřadným systémem posledního n-tého článku kinematické struktury $\mathbf{T}_{bn}$ je obecně funkcí n zobecněných souřadnic $q_1, q_2, \dots q_n$. Při známé poloze a orientaci koncového bodu kinematické struktury je známo číselné vyjádření prvků matice $\mathbf{T}_{bn}$ a vynásobením jednotlivých dílčích matic $\mathbf{A}_{i-1,i}$ v symbolickém tvaru pro danou kinematickou strukturu dostaneme symbolické vyjádření matice $\mathbf{T}_{bn}$, v jejíž jednotlivých prvcích jsou obsaženy zobecněné souřadnice v trigonometrických vztazích. Porovnáním stejnolehlých prvků číselného a symbolického vyjádření celkové transformační matice teoreticky dostaneme šestnáct rovnic pro řešení zobecněných souřadnic. Ale vzhledem k tomu, že poslední řádek homogenní matice nelze použít a také z důvodu lineární závislosti prvků submatice rotace (submatice rotace vyjadřuje jednotkové vektory na osách posledního souřadného systému tvořícího ortogonální systém) lze použít pouze šest nezávislých rovnic a nelze tedy provést řešení pro více stupňů volnosti než šest. Soustava rovnic je transcendentní a její řešení numerickými metodami je relativně obtížné. Určité zjednodušení představují numerické metody, které aproximují průběh polohy a orientace koncového bodu v okolí výchozího známého bodu - aproximační metody.

3.2.1 Aproximace použitím Taylorova rozvoje transformační matice

Homogenní transformační matici $\mathbf{T}_{bn}\ q_1,q_2,...,q_n$ je možno považovat za funkci více proměnných. Jelikož je tato funkce ve výchozím bodě daném souřadnicemi $q_1,q_2,...q_n$ diferencovatelná (existence spojité první a dalších derivací funkce polohy a orientace koncového bodu vyplývá ze samotné fyzikální podstaty této funkce), lze funkci v okolí tohoto výchozího bodu vyjádřit Taylorovým rozvojem (Frolov, 1988). Jelikož se jedná o iterační metodu, jsou použity jen první dva členy Taylorova rozvoje

$$\mathbf{T}_{bn}\ q_1+\Delta q_1,q_2+\Delta q_2,...,q_n+\Delta q_n\ =\mathbf{T}_{bn}\ q_1,q_2,...,q_n\ +\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\mathbf{T}_{bn}\ q_1,q_2,...,q_n}{\partial q_i}.\Delta q_i \tag{3-2}$$

kde

$$\frac{\partial\mathbf{T}_{bn}}{\partial q_i}=\mathbf{A}_{b0}.\mathbf{A}_{01}\ q_1\ .\mathbf{A}_{12}\ q_2\ ...\frac{\partial\mathbf{A}_{i-1,i}\ q_i}{\partial q_i}...\ \mathbf{A}_{n-1,n}\ q_n\ =\mathbf{U}_{ni}\ \mathbf{q} \tag{3-3}$$

a dostáváme maticovou rovnici

$$\mathbf{T}_{bn}\ \mathbf{q}+\Delta\mathbf{q}\ =\ \mathbf{T}_{bn}\ \mathbf{q}\ +\sum_{i=1}^{n}\mathbf{U}_{ni}\ \mathbf{q}\ .\Delta q_i \tag{3-4}$$

prvky matice číselně známy (žádaná poloha)	prvky matice číselně známy (výchozí poloha)	prvky matice číselně známy (derivace ve vých. pol.)	**neznámé**

Derivace transformační matice $\mathbf{A}_{i-1,i}$ podle obecné zobecněné souřadnice q_i je vypočtena jednoduše pomocí matice diferenciálního operátoru rotace nebo translace podle typu pohybové jednotky. Prvek na *m*-tém řádku a v *n*-tém sloupci matice $\mathbf{U}_{ni}$ označme $u^{ni}_{m,n}$. Prvky matice $\mathbf{T}_{bn}$ v žádané poloze označme $t^{d}_{m,n}$ a ve výchozí poloze $t^{v}_{m,n}$. Porovnáním vhodných stejnolehlých prvků v maticové rovnici (3-4) dostaneme soustavu rovnic pro řešení neznámých Δq_i. Např. pro tři stupně volnosti dostaneme soustavu

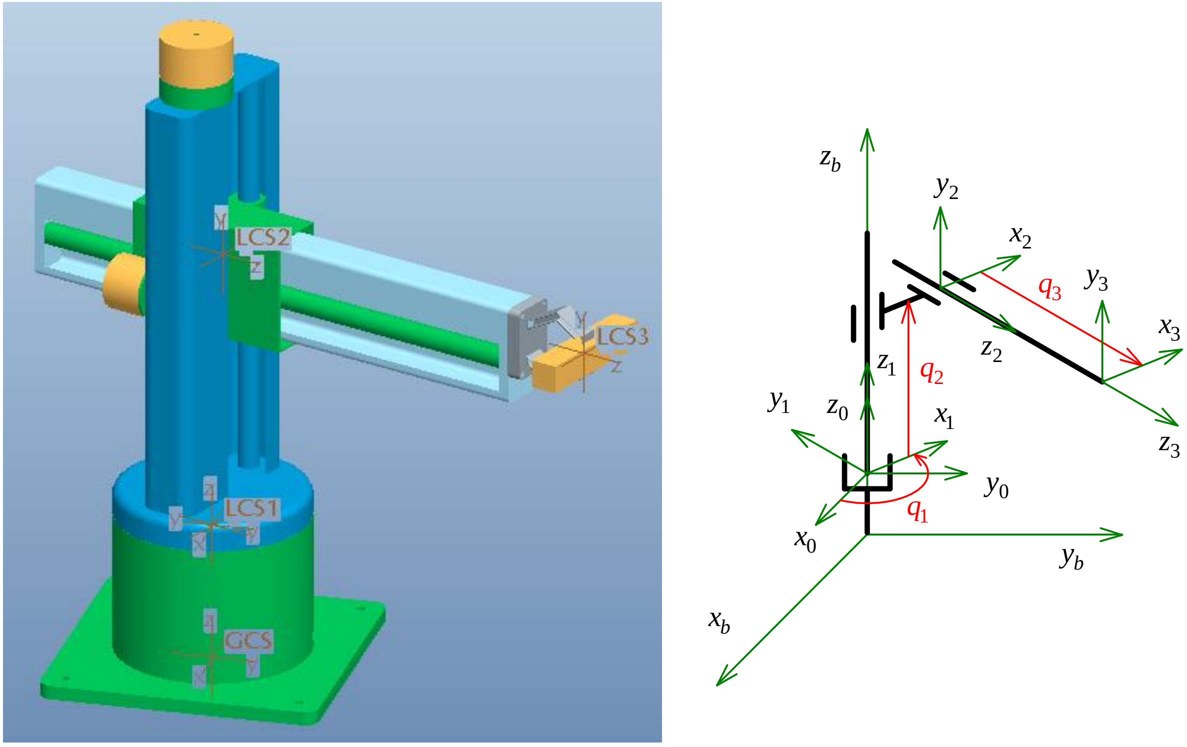
$$\begin{aligned}
u^{31}_{1,4}.\Delta q_1+u^{32}_{1,4}.\Delta q_2+u^{33}_{1,4}.\Delta q_3&=t^{d}_{1,4}-t^{v}_{1,4}\\
u^{31}_{2,4}.\Delta q_1+u^{32}_{2,4}.\Delta q_2+u^{33}_{2,4}.\Delta q_3&=t^{d}_{2,4}-t^{v}_{2,4}\\
u^{31}_{3,4}.\Delta q_1+u^{32}_{3,4}.\Delta q_2+u^{33}_{3,4}.\Delta q_3&=t^{d}_{3,4}-t^{v}_{3,4}
\end{aligned} \tag{3-5}$$

Je zřejmé, že pro tři stupně volnosti má smysl porovnávat pouze souřadnice koncového bodu, tj. prvky posledního sloupce transformačních matic, pro více stupňů volnosti se přidávají další prvky matic nad hlavní diagonálou. Řešením soustavy (3-5) dostaneme neznámé $\Delta q_1,\Delta q_2,...,\Delta q_n$ a vypočteme nový vektor zobecněných souřadnic **q**, který dále považujeme za výchozí polohu a provedeme výpočet

$\mathbf{T}_{bn}\ \mathbf{q}$ a $\mathbf{U}_{ni}\ \mathbf{q}$ pro tento nový výchozí vektor zobecněných souřadnic a znovu dosadíme do soustavy. Výpočet rychle konverguje ke správné hodnotě, počet iterací závisí na počtu stupňů volnosti a na konfiguraci mechanismu, většinou se ale pohybuje kolem deseti, soustava rovnic ale musí mít řešení (mechanismus nesmí být v singulární poloze), prvky transformační matice pro výchozí bod musí být vypočteny přesně, jinak řešení osciluje a není dosažena požadovaná přesnost výpočtu. Metodu lze použít bez úprav pouze do šesti stupňů volnosti (porovnáváme prvky nad hlavní diagonálou matic), pro více stupňů je třeba postupně pohybové jednotky blokovat, což prodlužuje výpočet.

Příklad 3-3 Řešení inverzní úlohy Taylorovým rozvojem transformační matice

Manipulátor s kinematickou strukturou RTT dle Obr. 3-4. Kinematická struktura a rozmístění souřadných systémů dle Denavit-Hartenbergova principu je na tomtéž obrázku vpravo. Zadáním je nalezení kloubových proměnných s_1, s_2 a s_3 při známé výchozí poloze koncového bodu a tomu odpovídající hodnotě kloubových proměnných ve výchozí poloze.



Obr. 3-4

Výchozí poloha je dána:

$s_1 := \pi$ $\qquad$ $x_0 := -0.065$

$s_2 := 0.9$ $\qquad$ $y_0 := 1.01$

$s_3 := 1.01$ $\qquad$ $z_0 := 4.454$

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23} \qquad T_{b3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TV := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro výchozí polohu a výpočet inverzní úlohy jsou na místě kloubových proměnných použity proměnné s_1, s_2 a s_3. Kloubové proměnné q_1, q_2 a q_3 jsou použity pro kontrolu správnosti výpočtu. Žádaná poloha koncového bodu je dána jako:

$$\text{neznáme} := 0 \qquad x_d := 0.04855 \qquad y_d := 0.80117 \qquad z_d := 1.154$$

$$TD := \begin{pmatrix} \text{neznáme} & \text{neznáme} & \text{neznáme} & 0.04855 \\ \text{neznáme} & \text{neznáme} & \text{neznáme} & 0.80117 \\ \text{neznáme} & \text{neznáme} & \text{neznáme} & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V transformační matici v žádané poloze známe pouze poslední sloupec, protože směr posledního článku, vedoucího k této žádané poloze ještě neznáme. Na místo submatice rotace vložíme tedy libovolnou proměnnou a zadáme její hodnotu, abychom mohli ve výpočtu dále s maticí TD pracovat. V prostředí Matcadu je dále ukázáno sestavení soustavy rovnic a její maticové řešení a dále ukázán způsob programovaní v prostředí Mathcadu.

Celý výpočet v prostředí Mathcadu je na ..\Mathcad\RTT_iverzni_Taylor.xmcd
Prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer) na
..\Mathcad\RTT_iverzni_Taylor.html

Komentovaný výpočet je také ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_inverzni_uloha_Taylor\RTT_inverzni_uloha_Taylor.mp4

Další animace se týká programového řešení výpočtu (tedy vlastního programování v prostředí Mathcad).

..\Animace\RTT_inverzni_uloha_Taylor\RTT_inverzni_uloha_Taylor_program.mp4

3.2.2 Newtonova aproximační metoda inverzní transformace

Newtonova metoda inverzní transformace, obdobně jako metoda Taylorova rozvoje transformační matice, aproximuje průběh funkce polohy a orientace koncového bodu kinematické struktury výpočtem diferenciálu této funkce při známém výchozím bodě. Na místě diferenciálu je v tomto případě použito Jakobiovy matice soustavy, jejíž odvození pro danou kinematickou strukturu je provedeno intuitivně přímo z definice Jakobiovy matice pro soustavu funkcí více proměnných (Rektorys, 1968). Předpokládejme, že v n-rozměrném prostoru je definováno m funkcí soustavou rovnic

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{3-6}$$

Tato soustava rovnic v podstatě představuje zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n]^T$ z n-rozměrného prostoru přiřazuje vektor $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2 \ \ldots \ y_m]^T$ z m-rozměrného prostoru. Mají-li funkce $f_1, f_2, \ldots, f_m$ parciální derivace 1. řádu a jsou diferencovatelné, lze napsat totální diferenciály

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\ dy_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n \\ &\vdots \\ dy_m &= \frac{\partial f_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n} dx_n \end{aligned} \tag{3-7}$$

Soustavu (3-7) je možno zapsat pomocí maticového zápisu

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \\ \vdots \\ dy_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & u_{m2} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \text{kde} \quad u_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \tag{3-8}$$

nebo symbolicky

$$d\mathbf{y} = \mathbf{J}.\, d\mathbf{x} \tag{3-9}$$

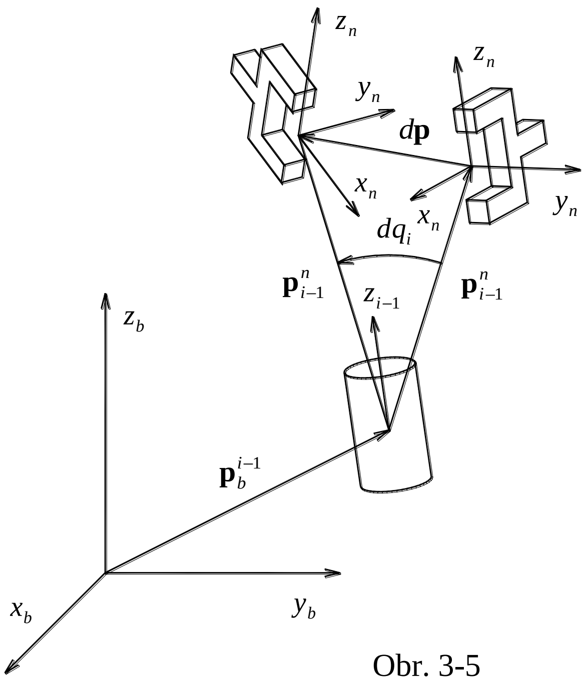
kde matice **J** je Jakobiova matice soustavy. V kinematice mechanismů, je možno vektor **x** nahradit vektorem zobecněné souřadnice **q** (počet složek je n - počet stupňů volnosti) a vektor **y** spojeným vektorem polohy **p** a orientace **o** koncového bodu (**p** - tři souřadnice x, y, z a **o** - tři souřadnice přibližovacího vektoru). Jakobiova matice soustavy **J** o rozměrech $6 \times n$ pak transformuje změnu obecné zobecněné souřadnice d**q** z n-rozměrného prostoru na změnu vektoru d**w** tj. změnu polohy a orientace nástroje respektive posledního článku v šestirozměrném prostoru. Pak je možno psát

$$d\mathbf{w} = \mathbf{J} \ . \ d\mathbf{q} \tag{3-10}$$

nebo v děleném tvaru

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{p} \\ d\mathbf{o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} . \, d\mathbf{q} \tag{3-11}$$

kde $\mathbf{J}_p$, $\mathbf{J}_o$ jsou $3 \times n$ submatice polohy a orientace. Odvození jednotlivých prvků Jakobiovy matice $\mathbf{J}$ je provedeno z jejich fyzikálního významu, protože exaktní odvození parciálních derivací transformačních funkcí je v obecném případě komplikované. Vyšetřeme nejdříve vliv jen dané zobecněné souřadnice q_i na změnu polohy koncového bodu vektoru $\mathbf{p}_{bn}$. Poměry (zveličené) např. pro i-tou rotační dvojici jsou znázorněny na Obr. 3-5. Při malé změně zobecněné souřadnice o úhel dq_i se koncový bod vektoru $\mathbf{p}_{bn}$ posune o vektor $d\mathbf{p}$. Stejný vektor $d\mathbf{p}$ dostaneme při otáčení i-té dvojice, tj. vektoru $\mathbf{p}_{i-1,n}$ kolem osy $\mathbf{k}_{i-1}$ o úhel dq_i. Jelikož se jedná o nekonečně malé natočení, oblouk, který opisuje koncový bod, je možno považovat za přímku a jeho velikost dostaneme jako součin velikosti průvodiče $\mathbf{p}_{i-1,n}$ a opsaného úhlu dq_i. Směr vektoru $d\mathbf{p}$ je dán vektorovým součinem $\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n}$. Pro změnu



Obr. 3-5

vektoru $\mathbf{p}_{bn}$ způsobenou pouze natočením i-té dvojice o úhel dq_i tedy platí

$$d\mathbf{p} = \hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n} \, .dq_i \tag{3-12}$$

Jelikož se jedná o nekonečně malá natočení, je možno vektor $d\mathbf{p}$ způsobený všemi rotačními dvojicemi vypočíst jako superpozici jednotlivých pohybů, což lze v maticovém tvaru zapsat

$$d\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{k}}_0.\mathbf{p}_{0n} & \hat{\mathbf{k}}_1.\mathbf{p}_{1n} & \cdots & \hat{\mathbf{k}}_{n-1}.\mathbf{p}_{n-1,n} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

V případě i-té translační dvojice se koncový bod vektoru $\mathbf{p}_{bn}$ může pohybovat pouze ve směru posuvu této dvojice, tj. ve směru $\mathbf{k}_{i-1}$ a velikost a směr vektoru $d\mathbf{p}$ je dána

$$d\mathbf{p} = \mathbf{k}_{i-1}.dq_i \tag{3-14}$$

Jelikož se jedná o nekonečně malé posuvy, je možno vektor $d\mathbf{p}$ způsobený všemi translačními dvojicemi vypočíst jako superpozici jednotlivých pohybů, což lze v maticovém tvaru zapsat

$$d\mathbf{p} = \mathbf{k}_0 \quad \mathbf{k}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{k}_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_3 \end{bmatrix} \tag{3-15}$$

Při kombinaci translačních a rotačních dvojic v kinematické struktuře, bude vždy na místě příslušného prvku submatice $\mathbf{J}_p$ buď vektorový součin $\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n}$ pro rotační dvojici a nebo $\mathbf{k}_{i-1}$ pro translační dvojici. Obdobná situace platí pro změnu souřadnic $d\mathbf{o}$ přibližovacího vektoru danou směrem otáčení a velikostí natočení jednotlivých rotačních dvojic. Pro *i*-tou rotační dvojici je změna souřadnic přibližovacího vektoru způsobená touto dvojicí dána

$$d\mathbf{o} = \hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{o}_n \;.dq_i \tag{3-16}$$

Pro všechny rotační dvojice a velmi malá natočení je možno použít princip superpozice jednotlivých pohybů a pro vektor $d\mathbf{o}$ platí

$$d\mathbf{o} = \left[\hat{\mathbf{k}}_0.\mathbf{o}_n \quad \hat{\mathbf{k}}_1.\mathbf{o}_n \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{k}}_{n-1}.\mathbf{o}_n \right] . \begin{bmatrix} dq_1 \\ dq_2 \\ \vdots \\ dq_n \end{bmatrix} \tag{3-17}$$

Pro translační dvojice nedochází ke změně orientace přibližovacího vektoru a proto příslušný prvek v submatici $\mathbf{J}_o$ bude nulový. Pro velmi malé změny zobecněné souřadnice tedy je možno nahradit změnu polohy a orientace koncového bodu jejím diferenciálem a psát

$$\left[\mathbf{w} \;\; \mathbf{q} + d\mathbf{q} \;\; \right] = \left[\mathbf{w} \;\; \mathbf{q} \;\; \right] + \mathbf{J} \;.\; d\mathbf{q} \tag{3-18}$$

nebo pomocí submatic polohy a orientace Jakobiovy matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \;\; \mathbf{q} + d\mathbf{q} \\ \mathbf{o} \;\; \mathbf{q} + d\mathbf{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \;\; \mathbf{q} \\ \mathbf{o} \;\; \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} .\; d\mathbf{q} \tag{3-19}$$

Uvedená interpretace Jakobiovy matice slouží pro definovaný vektor $\mathbf{w}$ zahrnující komplexní informaci o poloze a orientaci koncového bodu mechanismu. Vynásobením rovnice (3-19) zleva inverzní Jakobiho maticí dostaneme změnu zobecněné souřadnice ve vztahu

$$d\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} d\mathbf{p} \\ d\mathbf{o} \end{bmatrix} \tag{3-20}$$

Tento vztah platí s určitou přesností jen v okolí výchozího bodu pro malé změny $d\mathbf{p}, d\mathbf{o}$, ale jelikož se jedná o iterační metodu, je možno přejít od diferenciálu na diferenci

$$\Delta\mathbf{q}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \;\; \mathbf{q}^{(k)} \\ \mathbf{J}_o \;\; \mathbf{q}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} . \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{p}^{(k)} \\ \Delta\mathbf{o}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{3-21}$$

a vypočítat novou výchozí polohu podle vztahu

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}^{(k)} \tag{3-22}$$

V nultém kroku musí být známa výchozí poloha koncového bodu $\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{p}(\mathbf{q}^{(0)})$ a orientace přibližovacího vektoru $\mathbf{o}^{(0)} = \mathbf{o}(\mathbf{q}^{(0)})$ při známé výchozí hodnotě zobecněné souřadnice $\mathbf{q}^{(0)}$. Žádaná poloha koncového bodu $\mathbf{p}^{d} = \mathbf{p}(\mathbf{q}^{d})$ a žádaná orientace přibližovacího vektoru $\mathbf{o}^{d} = \mathbf{o}(\mathbf{q}^{d})$ je číselně známa, ale neznáme vektor zobecněných souřadnic $\mathbf{q}^{d}$ v žádané poloze. Pro první iteraci je možno napsat

$$d\mathbf{p} \approx \Delta\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{p}^{d} - \mathbf{p}^{(0)} \tag{3-23}$$

$$d\mathbf{o} \approx \Delta\mathbf{o}^{(0)} = \mathbf{o}^{d} - \mathbf{o}^{(0)} \tag{3-24}$$

a dosadit do vztahu), kde $d\mathbf{q}$ nahradíme $\Delta\mathbf{q}$. Algoritmus výpočtu:

k = 0

$$\Delta\mathbf{q}^{(k)} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \;\; \mathbf{q}^{(k)} \\ \mathbf{J}_o \;\; \mathbf{q}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{p}^{(k)} \\ \Delta\mathbf{o}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}^{(k)}$ považujeme za novou výchozí hodnotu

k = k + 1

Vypočteme $\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}\;\;\mathbf{q}^{(k)}$, $\mathbf{o}^{(k)} = \mathbf{o}\;\;\mathbf{q}^{(k)}$, $\Delta\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}^{d} - \mathbf{p}^{(k)}$, $\Delta\mathbf{o}^{(k)} = \mathbf{o}^{d} - \mathbf{o}^{(k)}$,

$\mathbf{J}_p \;\; \mathbf{q}^{(k)}$, $\mathbf{J}_o \;\; \mathbf{q}^{(k)}$

Jestli $\left|\Delta\mathbf{p}^{(k)}\right| \geq \varepsilon_p$ nebo $\left|\Delta\mathbf{o}^{(k)}\right| \geq \varepsilon_o$ ($\varepsilon_p, \varepsilon_o$ vhodně stanovené přesnosti), jdi na 1)

$\mathbf{q}^{d} = \mathbf{q}^{(k)}$

Při rozměru Jakobiovy matice $6 \times n$ je možno tento výpočet provést pouze do $n \leq 6$, tedy pouze do šesti stupňů volnosti, pro více stupňů volnosti nelze provést jednoduše inverzní matici (není čtvercová). Pro menší počet stupňů volnosti než šest vždy použijeme tolik řádků matice $\mathbf{J}$, kolik je stupňů volnosti, tedy submatici $\mathbf{J}_n$ rozměru $n \times n$. Vždy se snažíme použít submatici $\mathbf{J}_p$ pro polohu koncového bodu, tedy první tři řádky a ze submatice $\mathbf{J}_o$ použijeme ty řádky, ve kterých se souřadnice přibližovacího vektoru mění vlivem změny některé zobecněné souřadnice. Metoda je také citlivá na tzv. singulární polohu mechanismu, tj. polohu, ve které je determinant submatice $\mathbf{J}_n$ (tzv. Jakobián) nulový.

Příklad 3-4 Řešení inverzní úlohy kinematiky inverzí Jakobiho matice

Opět stejný manipulátor s kinematickou strukturou RTT dle Obr. 3-4. Zadáním je nalezení trajektorie kloubových proměnných, které mohou být zasílány např. jako žádané polohy do regulátorů polohy jednotlivých pohybových os, popř. slouží k dalšímu modelování dynamiky mechanismu. Zadáno je počáteční zrychlení, počáteční rychlost a počáteční poloha koncového bodu a počáteční kloubové proměnné. Řešena je pouze část trajektorie, a to rovnoměrně zrychlený pohyb koncového bodu daným zrychlením po dobu 0,2 sec.

Celý výpočet v prostředí Mathcadu je na ..\Mathcad\RTT_inv_uloha_transc_Jacob.xmcd

Prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer) na
..\Mathcad\RTT_inv_uloha_transc_Jacob.html

Komentovaný výpočet je také ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_inverzni_uloha_Jacob\RTT_inverzni_uloha_Jacob.mp4

Další animace se týká programového řešení výpočtu (tedy vlastního programování v prostředí Mathcad).

..\Animace\RTT_inverzni_uloha_Jacob\RTT_inverzni_uloha_Jacob_program.mp4

Pomocí Jakobiovy matice dokážeme také řešit přímou a inverzní úlohu dotýkající se rychlostí. Pro přepočet rychlostí pohybových jednotek na rychlost koncového bodu a naopak použijeme jiné fyzikální interpretace Jakobiovy matice. Pokud považujeme zobecněnou souřadnici $\mathbf{q}$ za funkci času, tj. $\mathbf{q}=\mathbf{q}\;t$ a nahradíme v transformační maticové rovnici $d\mathbf{q}$ derivací podle času, tj. $\dot{\mathbf{q}}$, je žádoucí, aby výsledkem transformace byl komplexní vektor translační a úhlové rychlosti koncového bodu. Submatice $\mathbf{J}_p$ zůstává stejná, submatice $\mathbf{J}_o$ je nahrazena submaticí $\mathbf{J}_\omega$ transformující rychlost pohybových jednotek na úhlovou rychlost přibližovacího vektoru. Prvky submatice $\mathbf{J}_\omega$ opět odvodíme z fyzikálního významu. Pro i-tou rotační dvojici je vektor úhlové rychlosti přibližovacího vektoru způsobený touto dvojicí dán její osou otáčení a její úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}=\mathbf{k}_{i-1}.\dot{q}_i$. Pro současné působení všech rotačních dvojic je možno opět použít princip superpozice

$$\boldsymbol{\omega}= \begin{matrix}\mathbf{k}_0 & \mathbf{k}_1 & \cdots & \mathbf{k}_{n-1}\end{matrix} . \begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \dot{q}_2\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix} \tag{3-25}$$

Translační dvojice se na úhlové rychlosti přibližovacího vektoru nepodílejí, a proto na místě příslušných prvků budou v případě kombinace rotačních a translačních kinematických dvojic nulové hodnoty. Výsledný zápis transformační rovnice je

$$\begin{bmatrix}\mathbf{v}\\ \boldsymbol{\omega}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{J}_p\\ \mathbf{J}_\omega\end{bmatrix}.\dot{\mathbf{q}} \tag{3-26}$$

3.3 Optimalizační metody inverzní transformace

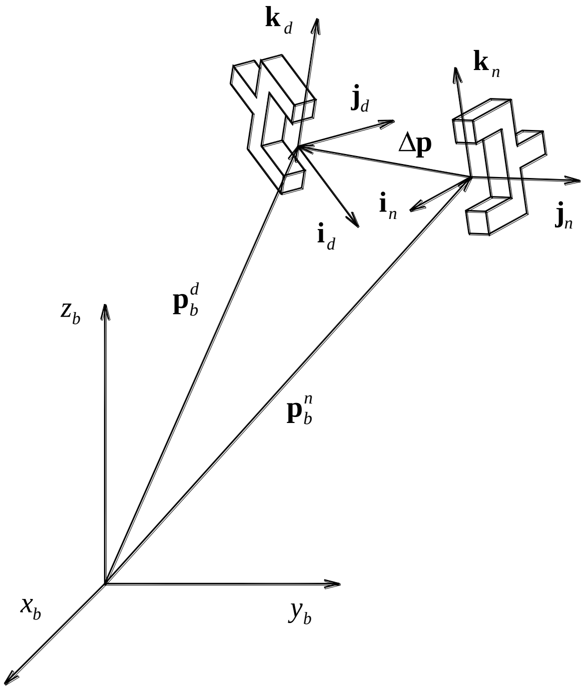
Optimalizační metody obecně jsou založeny na změnách parametrů optimalizovaného systému, kde kritériem optimálního řešení je extrém tzv. objektivní funkce (Reklaitis, 1983). Objektivní funkcí v našem případě je tzv. chyba polohování, parametry soustavy jsou zobecněné souřadnice jednotlivých článků kinematické struktury. Změny parametrů jsou prováděny fiktivním pohybem jednotlivých článků mechanismu, při kterém je vyhodnocována objektivní funkce - chyba polohování a při dosažení minima této chyby jsou odečteny hodnoty zobecněných souřadnic jednotlivých článků mechanismu.

Chyba polohování je také základním kritériem při úlohách řízení polohových servosmyček jednotlivých článků. Chyba polohování udává obecně chybu dosažení žádané hodnoty polohy a orientace daného článku a je definována jako součet chyby polohy (3-27) a chyby orientace (3-28) - Obr. 3-6.

$$\Delta P(\mathbf{q}) = (\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}))^T.\ (\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q})) \tag{3-27}$$

$$\Delta O(\mathbf{q}) = (\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n(\mathbf{q}) - 1)^2 + (\mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n(\mathbf{q}) - 1)^2 + (\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n(\mathbf{q}) - 1)^2 \tag{3-28}$$

$$E(\mathbf{q}) = \Delta P(\mathbf{q}) + \Delta O(\mathbf{q}) \tag{3-29}$$



Obr. 3-6

kde $\mathbf{p}_{bd}$ je vektor žádané polohy koncového bodu, $\mathbf{p}_{bn}$ vektor okamžité (výchozí) polohy koncového bodu, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jednotkové vektory na osách *x, y, z,* index *b* - základní (bázový) souřadný systém (*GCS*), index *d* – žádaná poloha, index *n* - okamžitá poloha posledního lokálního souřadného systému (LCS_n).

Při numerickém řešení inverzní kinematické úlohy tedy hledáme takový vektor zobecněné souřadnice $\mathbf{q}^*$, aby platilo

$$E(\mathbf{q}^*) = \min\ E(\mathbf{q}) \tag{3-30}$$

$$q_i^l \le q_i^* \le q_i^u \qquad i = 1,\dots,n \tag{3-31}$$

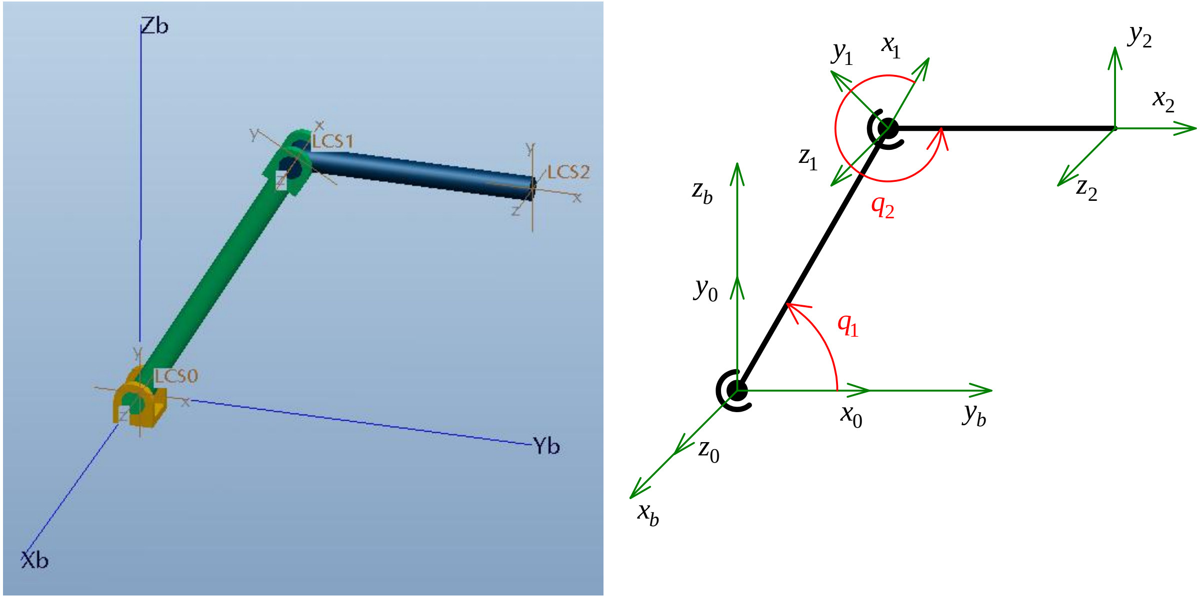
kde q_i^l, q_i^u a jsou fyzikální meze horní a dolní zobecněné souřadnice každého článku a zároveň musí být splněno

$$E(\mathbf{q}^*) \le \varepsilon \tag{3-32}$$

kde ε je přípustná chyba polohování.

Příklad 3-5 Výpočet a zobrazení chyby polohování

Příklad mechanismu se dvěma stupni volnosti dle Obr. 3-7. Hledány jsou hodnoty celkové chyby polohování $E(q_1, q_2)$ pro žádanou polohu a orientaci posledního článku dle uvedeného obrázku. Jako výchozí poloha je přitom brána libovolná poloha kolem žádané polohy. Je tedy nutno vyjádřit chybu polohy a chybu orientace jako funkci kloubových proměnných. Nejprve jsou vypočteny vektory polohy koncového bodu v žádané a obecné poloze



Obr. 3-7

$$p_{bd} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.346 \end{pmatrix} \qquad p_{bn}(q_1, q_2) := \begin{pmatrix} 0.0 \\ l_1 \cdot \cos(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - l_2 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \\ l_1 \cdot \sin(q_1) + l_2 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + l_2 \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \end{pmatrix}$$

Dále jsou vyjádřeny jednotkové vektory v žádané poloze mechanismu pro $q_1 = 60°$ a $q_2 = 300°$

$$i_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k_d := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a v obecné poloze pro libovolné hodnoty q_1 a q_2

$$i_n(q_1, q_2) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \\ \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \end{pmatrix}$$

$$j_n(q_1, q_2) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(q_1) \cdot \sin(q_2) - \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \end{pmatrix} \qquad k_n(q_1, q_2) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

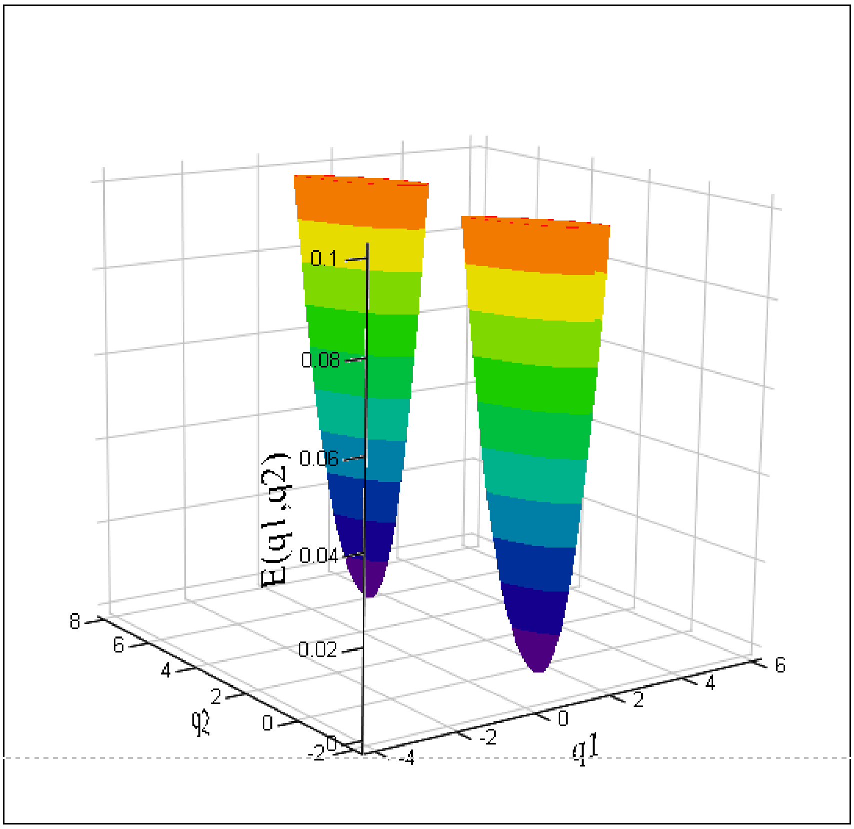
Chyba polohy, chyba orientace a celková chyba polohování je pak vyjádřena jako

$$\mathrm{deltaP}(q_1, q_2) := \left[\left(p_{bd} - p_{bn}(q_1, q_2) \right)^T \cdot \left(p_{bd} - p_{bn}(q_1, q_2) \right) \right]$$

$$\mathrm{deltaO}(q_1, q_2) := \left[\left(i_d^T \cdot i_n(q_1, q_2) - 1 \right)^2 + \left(j_d^T \cdot j_n(q_1, q_2) - 1 \right)^2 + \left(k_d^T \cdot k_n(q_1, q_2) - 1 \right)^2 \right]$$

$$E(q_1, q_2) := \mathrm{deltaP}(q_1, q_2) + \mathrm{deltaO}(q_1, q_2)$$

Na obrázku Obr. 3-8 je ukázán výsledný graf chyby polohování ve 3D zobrazení. Na tomto zobrazení je vidět typický průběh chyby polohování s minimem $E(q_1, q_2) = 0$, ze kterého můžeme odečít polohu $q_1 = 60°$ a $q_2 = 300°$. Druhý (na obrázku pravý bližší průběh) ukazuje řešení pro hodnoty pro $q_1 = 60°$ a $q_2 = -60°$, což je vlastně totéž řešení, protože $q_2 = 300° = -60°$.



Obr. 3-8

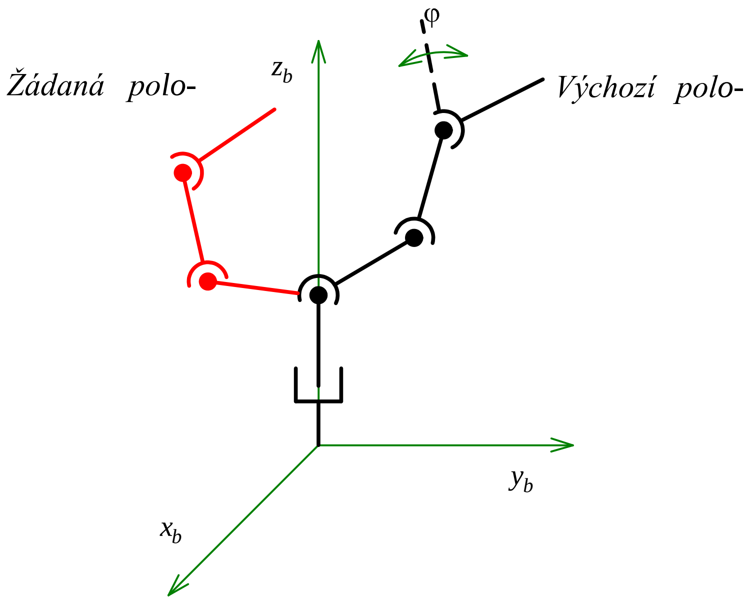
Výpočet chyby polohování v prostředí Mathcad pro mechanismus se dvěma stupni volnosti dle Obr. 3-7 je ukázán na následujícím odkaze - ..\Mathcad\RR_deg.xmcd

Prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer) na ..\Mathcad\RR_deg.html
Komentovaný výpočet chyby polohování je také ukázán jako animace:

..\Animace\Chyba_polohovani\Chyba_polohovani.mp4

3.3.1 Metody heuristické

Tato skupina metod je založena na optimalizační technice přímého heuristického vyhledávání řešení. Principem vyhledávání je minimalizace funkce chyby polohování postupným fiktivním pohybem jednotlivých pohybových jednotek v cyklu. Výhodou je poměrně rychlá konvergence do bodu blízkého konečnému řešení. Tyto metody jsou použitelné i pro větší počet stupňů volnosti než šest, nejsou citlivé na singulární polohu mechanismu a na přesnost stanovení výchozí polohy. Mezi nejpoužívanější patří metoda cyklického decimování chyby polohování - Cyclic Coordinate Descent (CCD), (Luenberger, 1984), a metoda, kterou vyvinul K. Kazerounian (Kazerounian, 1987).



Obr. 3-9

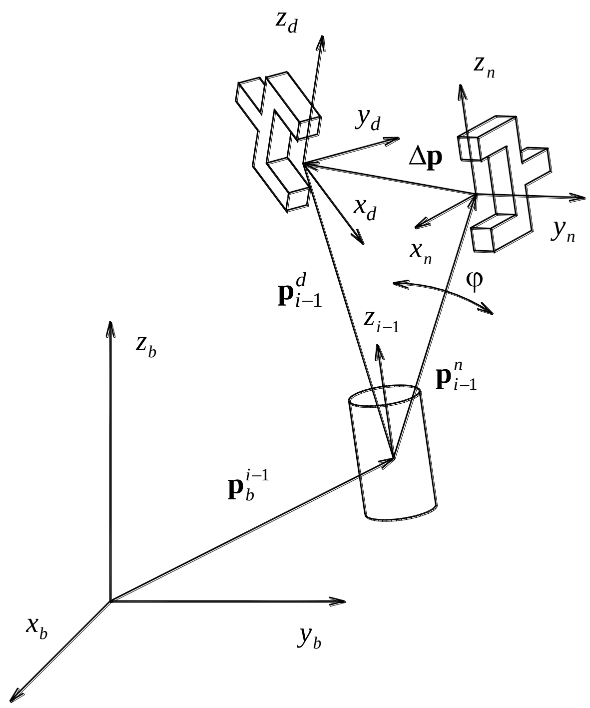
Metoda CCD používá k minimalizaci celkové chyby polohování postupného fiktivního pohybu jednotlivých článků. Výchozí podmínky pro použití metody jsou - otevřená kinematická struktura, tuhé články, pohybové jednotky s jedním stupněm volnosti, osy z ve směru otáčení nebo posuvu článků[4]. Každý cyklus hledání řešení sestává z n kroků (n - počet stupňů volnosti). Začíná se fiktivní pohyb posledním článkem, ostatní pohybové jednotky jsou zablokovány. Poslední článek se natáčí o úhel φ do polohy, ve které je minimum chyby polohování ΔE. Jelikož chyba polohování je definována jako součet chyby polohy a chyby orientace, je optimální poloha natočení článku kompromisem mezi minimem chyby polohy a orientace (v Obr. 3-9 čárkovaně). Po nalezení minima chyby polohování je zablokována poslední rotační jednotka a uvolněna předchozí. Dvojice posledních článků se opět natáčí do polohy, ve které je chyba polohování ΔE minimální. Takto se postupně dojde až k první pohybové jednotce. Cyklus iterací (fiktivních pohybů) se opět opakuje od posledního článku a to tak dlouho, až je splněna podmínka, že chyba polohování je menší než nastavená přesnost výpočtu.

Následující odvození je provedeno pro rotační pohybovou jednotku. Obecně se v i-tém kroku cyklu ($i = n, n$-1, ..,1) pohybuje pouze pohybová jednotka i (ostatní jsou blokovány) tak, aby byla minimalizovaná funkce chyby polohování. Obr. 3-10 znázorňuje jeden krok cyklu při pohybu rotační poh. jednotky kolem osy z_{i-1}. Vektor $\mathbf{p}_{b,i-1}$ ukazuje okamžitou polohu počátku i-1 souřadného systému, vektor $\mathbf{p}_{i-1,n}$ je vektor z počátku i-1 souř. systému do okamžité polohy počátku posledního (n-tého)

[4] obecně není nutno dodržet Denavit-Hartenbergův princip orientace souřadných systémů, ale z hlediska snadné algoritmizace a automatizace výpočtu je to výhodné

souř. systému, $\mathbf{p}_{i-1,d}$ je vektor z počátku i-1 souř. systému do počátku posledního souř. systému v žádané poloze.

V i-tém kroku vektory $\mathbf{p}_{b,i-1}$ a $\mathbf{p}_{i-1,d}$ zůstávají konstantní a vektor $\mathbf{p}_{i-1,n}$ a poslední souřadný



Obr. 3-10

systém v okamžité poloze se natáčejí kolem osy z_{i-1} tak, aby byla minimalizována funkce celkové chyby polohování $E(\mathbf{q})$. Chyba polohy $\Delta P(\mathbf{q})$ je v tomto případě definovaná pomocí vektorů $\mathbf{p}_{i-1,n}$ a $\mathbf{p}_{i-1,d}$.

V i-tém kroku při rotační pohybové jednotce je zobecněná proměnná q_i představována úhlem natočení ϑ_i, ostatní zobecněné souřadnice jsou konstantní. Vektor $\mathbf{p}_{i-1,n}$ rotuje kolem osy z_{i-1} o úhel φ do polohy $\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi)$. V tomto kroku je chyba polohy a orientace pouze funkcí jediné proměnné φ. Úloha je najít takové φ^* pro které je minimální celková chyba polohování, tj.

$$E\left(q_i+\varphi^*\right)=\min E\left(q_i+\varphi\right) \tag{3-33}$$

pak

$$q_i^{(k+1)}=q_i^{(k)}+\varphi^* \tag{3-34}$$

a přejdeme k další pohybové jednotce. Takto postupně najdeme nový vektor zobecněné souřadnice $\mathbf{q}^{(k+1)}$, který slouží jako výchozí poloha pro další cyklus iterace. Obecný n-rozměrný problém je takto převeden na jednorozměrný s proměnnou φ. Chybu polohy pak je možno vyjádřit

$$\begin{aligned}\Delta P(\alpha)&=\left[\mathbf{p}_{i-1,d}-\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi)\right]^T\cdot\left[\mathbf{p}_{i-1,d}-\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi)\right]=\\&=(\mathbf{p}_{i-1,d})^T\cdot\mathbf{p}_{i-1,d}+\left[\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi)\right]^T\cdot\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi)-2\left[\mathbf{p}_{i-1,d}\right]^T\cdot\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi)\end{aligned} \tag{3-35}$$

jelikož první dva členy v rovnici (3-35) jsou v dané výchozí poloze kladné a konstantní, úloha hledání minima funkce $\Delta P(\varphi)$ přechází na hledání maxima funkce

$$g_1(\varphi)=\left(\mathbf{p}_{i-1,d}\right)^T\cdot\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi) \tag{3-36}$$

Obdobně chybu orientace je možno vyjádřit jako funkci φ

$$\Delta O(\varphi)=\left(\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n(\varphi)-1\right)^2+\left(\mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n(\varphi)-1\right)^2+\left(\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n(\varphi)-1\right)^2 \tag{3-37}$$

Jednotkové vektory jsou znázorněny na Obr. 3-11. Jejich skalární součiny je možno vyjádřit jako

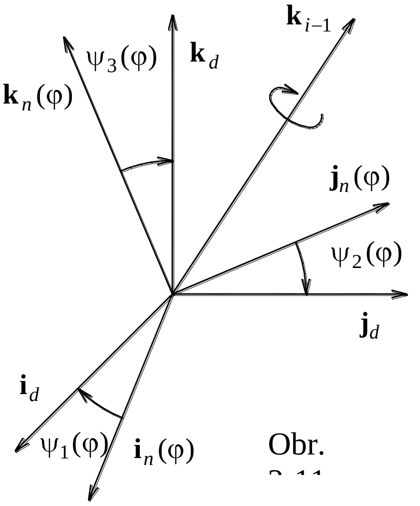
$$\begin{aligned}\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n(\varphi)&=\cos\psi_1(\varphi)\\ \mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n(\varphi)&=\cos\psi_2(\varphi)\\ \mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n(\varphi)&=\cos\psi_3(\varphi)\end{aligned} \tag{3-38}$$

a chybu orientace dosazením do (3-37)

$$\Delta O(\varphi)=\sum_{j=1}^{3}\left(\cos\psi_j(\varphi)-1\right)^2 \tag{3-39}$$

kde $\cos(\psi_j)\in\langle -1,1\rangle$. Vzhledem k rozsahu funkčních hodnot funkce cos, hledání minima funkce $\Delta O(\varphi)$ je totéž jako hledání maxima funkce:

$$g_2(\varphi)=\sum_{j=1}^{3}\cos\psi_j(\varphi) \tag{3-40}$$



Obr.

Tato matematická úprava není z hlediska exaktního řešení úplně rovnocenná, obecně minimum $\Delta O(\varphi)$ a maximum $g_2(\varphi)$ má jiné řešení, ale pro danou metodu numerické iterace je postačující, obě řešení se asymptoticky blíží a úprava velmi zjednodušuje a zrychluje výpočet. Kombinací chyby polohy a orientace přechází úloha na nalezení maxima funkce

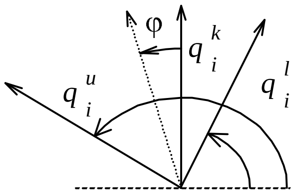
$$g(\varphi)=w_p g_1(\varphi)+w_o g_2(\varphi) \tag{3-41}$$

Jednotlivá kritéria (polohy a orientace) mohou být doplněna váhovými koeficienty w_p a w_0 přiznávajícími větší důležitost přesnosti dosažení polohy, či orientace. Je obtížné nalézt obecné pravidlo pro volbu váhových koeficientů, protože základní přesnost polohování jako objektivní funkce je dána volbou požadované maximální chyby polohy a orientace v součtu a vhodná volba těchto koeficientů se navíc liší případ od případu podle kinematické struktury a polohy žádaného a výchozího bodu. Jednoduchým kritériem je nárůst počtu iterací při praktickém použití, kdy průběh funkcí g_1 nebo g_2 kolem maxima je velmi plochý. Programové řešení umožňuje tuto situaci registrovat a reagovat zmenšením váhového koeficientu. Úloha tedy je najít takové $\varphi*$, které splňuje podmínku

$$g(\varphi*) = \max g(\varphi) \tag{3-42}$$

a dále úhel $\varphi*$ musí být v příslušných fyzikálních mezích - Obr. 3-12

$$\begin{aligned}
&\varphi^l \le \varphi* \le \varphi^u \\
&\varphi^l = q_i^k - q_i^l \\
&\varphi^u = q_i^u - q_i^k
\end{aligned} \tag{3-43}$$



Obr. 3-12

3.3.1.1 Analytické řešení

Vektor $\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi)$ lze pomocí Rodrigovy formule (Wang, 1985) vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{p}_{i-1,n}(\varphi) = \mathbf{k}_{i-1}.\left((\mathbf{p}_{i-1,n})^T.\mathbf{k}_{i-1}\right).(1-\cos\varphi) + \mathbf{p}_{i-1,n}.\cos\varphi + (\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n}).\sin\varphi \tag{3-44}$$

a dosadit do $g_1(\varphi)$

$$\begin{aligned}
g_1(\varphi) = {} & \left((\mathbf{p}_{i-1,d})^T.\mathbf{k}_{i-1}\right).\left((\mathbf{p}_{i-1,n})^T.\mathbf{k}_{i-1}\right).(1-\cos\varphi) + (\mathbf{p}_{i-1,d})^T.\mathbf{p}_{i-1,n}.\cos\varphi + \\
& + (\mathbf{p}_{i-1,d})^T.(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n}).\sin\varphi
\end{aligned} \tag{3-45}$$

obdobně lze vyjádřit $g_2(\varphi)$

$$\begin{aligned}
g_2(\varphi) = {} & (\mathbf{i}_d^T.\mathbf{k}_{i-1}).(\mathbf{i}_n^T.\mathbf{k}_{i-1}).(1-\cos\varphi) + \mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n.\cos\varphi + \mathbf{i}_d^T.(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{i}_n).\sin\varphi + \\
& + (\mathbf{j}_d^T.\mathbf{k}_{i-1}).(\mathbf{j}_n^T.\mathbf{k}_{i-1}).(1-\cos\varphi) + \mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n.\cos\varphi + \mathbf{j}_d^T.(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{j}_n).\sin\varphi + \\
& + (\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_{i-1}).(\mathbf{k}_n^T.\mathbf{k}_{i-1}).(1-\cos\varphi) + \mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n.\cos\varphi + \mathbf{k}_d^T.(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{k}_n).\sin\varphi
\end{aligned} \tag{3-46}$$

dosazením $g_1(\varphi)$ a $g_2(\varphi)$ do $g(\varphi)$ a úpravou závorek dostaneme

$$g(\varphi) = a_1(1-\cos\varphi) + a_2\cos\varphi + a_3\sin\varphi \tag{3-47}$$

kde a_1, a_2, a_3 jsou v dané poloze konstanty vyjádřené pomocí polohových a jednotkových vektorů

$$\begin{aligned}
a_1 = {} & w_p\left((\mathbf{p}_{i-1,d})^T.\mathbf{k}_{i-1}\right).\left((\mathbf{p}_{i-1,n})^T.\mathbf{k}_{i-1}\right) + \\
& + w_o\left[(\mathbf{i}_d^T.\mathbf{k}_{i-1}).(\mathbf{i}_n^T.\mathbf{k}_{i-1}) + (\mathbf{j}_d^T.\mathbf{k}_{i-1}).(\mathbf{j}_n^T.\mathbf{k}_{i-1}) + (\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_{i-1}).(\mathbf{k}_n^T.\mathbf{k}_{i-1})\right]
\end{aligned} \tag{3-48}$$

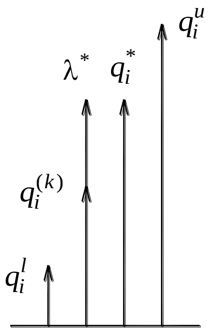
$$a_2 = w_p \left(\mathbf{p}_{i-1,d}\right)^T.\mathbf{p}_{i-1,n} + w_o\left[\left(\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n\right) + \left(\mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n\right) + \left(\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n\right)\right] \tag{3-49}$$

$$a_3 = \mathbf{k}_{i-1}^T\left(w_p\left(\hat{\mathbf{p}}_{i-1,n}.\mathbf{p}_{i-1,d}\right) + w_o\left[\left(\hat{\mathbf{i}}_n.\mathbf{i}_d\right) + \left(\hat{\mathbf{j}}_n.\mathbf{j}_d\right) + \left(\hat{\mathbf{k}}_n.\mathbf{k}_d\right)\right]\right) \tag{3-50}$$

Pokud neuvažujeme limity pohybů jednotlivých pohybových os lze najít maximum funkce $g(\varphi)$ a z toho plynoucí $\varphi*$ z podmínek:

$$\frac{dg(\varphi)}{d\varphi} = (a_1 - a_2)\sin\varphi + a_3\cos\varphi = 0$$

$$\frac{d^2g(\varphi)}{d\varphi^2} = (a_1 - a_2)\cos\varphi - a_3\sin\varphi < 0$$



Obr. 3-13

Řešení je platné pokud $\varphi^l \le \varphi* \le \varphi^u$. Pokud vypočtené $\varphi*$ je mimo meze, pak v daném kroku provedeme následující přiřazení

$$g(\varphi^l) > g(\varphi^u) \qquad \varphi* = \varphi^l$$

$$g(\varphi^l) < g(\varphi^u) \qquad \varphi* = \varphi^u$$

Obdobné vztahy lze odvodit pro translační jednotku. V tomto případě může být redukována jen chyba polohy. Translační pohybová jednotka se fiktivně posouvá z výchozí polohy o vzdálenost λ. Pak pro chybu polohy (orientace se nemění) platí

$$\Delta P(\lambda) = \left(\mathbf{p}_{i-1,d} - \left(\mathbf{p}_{i-1,n} + \mathbf{k}_{i-1}.\lambda\right)\right)^T.\left(\mathbf{p}_{i-1,d} - \left(\mathbf{p}_{i-1,n} + \mathbf{k}_{i-1}.\lambda\right)\right) \tag{3-54}$$

úpravou dostaneme

$$\Delta P(\lambda) = \Delta\mathbf{p}^T.\Delta\mathbf{p} - 2\Delta\mathbf{p}^T.\mathbf{k}_{i-1}.\lambda + \lambda^2 \tag{3-55}$$

Hledáme tedy takové $\lambda*$ pro které platí - Obr. 3-13

$$\Delta P(\lambda*) = \min\left(\Delta P(\lambda)\right) \tag{3-56}$$

pro meze $\quad \lambda^l \le \lambda* \le \lambda^u \qquad \lambda^l = q_i^k - q_i^l \qquad \lambda^u = q_i^u - q_i^k \quad$ (3-57)

řešení nalezneme z podmínek

$$\frac{d\left(\Delta P(\lambda)\right)}{d\lambda} = 2\left(\lambda - \Delta\mathbf{p}^T.\mathbf{k}_{i-1}\right) = 0 \tag{3-58}$$

$$\frac{d^2\left(\Delta P(\lambda)\right)}{d\lambda^2} = 2 > 0 \tag{3-59}$$

Pokud $\lambda*$ je mimo uvedené meze pak analogicky provedeme následující přiřazení

$$\Delta P(\lambda^u) < \Delta P(\lambda^l) \quad \lambda* = \lambda^u \qquad\qquad \Delta P(\lambda^u) > \Delta P(\lambda^l) \quad \lambda* = \lambda^l \tag{3-60}$$

Takto je v každém kroku CCD metody redukován *n*-rozměrný minimalizační problém na jednorozměrný, jehož analytické řešení může být poměrně snadno vypočítáno. Jelikož je v každém kroku minimalizována funkce celkové chyby polohování, je zajištěna globální konvergence metody. Praktické zkušenosti s touto metodou ukazují, že konverguje k poloze blízké řešení velmi rychle, prakticky v několika cyklech. Další konvergence z polohy velmi blízké řešení do žádané polohy již trvá podstatně déle. Z důvodu heuristické povahy vyhledávání řešení, není metoda citlivá na přesnost stanovení výchozí polohy. Potíže s touto metodou nastávají velmi zřídka. Někdy dochází ke konvergenci k bodu blízkému řešení, ale chyba polohy už se dále nezmenšuje a je stále větší než zadaná minimální hodnota. Pokud existuje více řešení pro danou polohu a orientaci pracovního článku mechanismu, metoda nenalezne všechna možná řešení, ale je nutno ji modifikovat. Obecně ale platí, že metoda je použitelná i pro více než šest stupňů volnosti a nezávisí na případné singularitě ve výchozí poloze, což jsou podstatné výhody proti aproximační skupině metod.

3.3.2 Metody založené na gradientu chyby polohování

Gradientní metody (Reklaitis, 1983) patří ke skupině optimalizačních metod pro řešení inverzní transformace. Optimalizace je opět prováděna iterací postupným zpřesňováním vektoru zobecněných proměnných $\mathbf{q}$, který vystupuje jako parametr optimalizované soustavy při jeho známé výchozí a žádané hodnotě. Jako kritérium optimalizace (objektivní funkce) vystupuje minimum chyby polohování $E(\mathbf{q})$. Principem gradientních metod je fiktivní pohyb všemi pohybovými jednotkami dané kinematické struktury současně tak, aby se hodnota chyby polohování $E(\mathbf{q})$ v daném kroku pohybovala ve směru svého největšího spádu, tj. ve směru svého záporného gradientu. Chyba polohování je funkce více proměnných a tedy pro její gradient platí

$$\nabla E(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial E(\mathbf{q})}{\partial q_1} & \dfrac{\partial E(\mathbf{q})}{\partial q_2} & \cdots & \dfrac{\partial E(\mathbf{q})}{\partial q_n} \end{bmatrix}^T \tag{3-61}$$

Jednotlivé složky vektoru $\nabla E(\mathbf{q})$ odpovídají příspěvku změny jednotlivých zobecněných souřadnic k chybě polohování. Tam kde je velká hodnota, dochází již při malé změně zobecněné souřadnice k velké změně chyby polohování a naopak. Krok

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}^T \tag{3-62}$$

který je nutno vykonat jednotlivými pohybovými jednotkami směrem k minimu chyby polohování je tedy úměrný vektoru $\nabla E(\mathbf{q})$. Chyba polohování je definována

$$E(\mathbf{q}) = \left(\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q})\right)^T . \left(\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q})\right) + \left(\mathbf{i}_d^T . \mathbf{i}_n(\mathbf{q}) - 1\right)^2 + \left(\mathbf{j}_d^T . \mathbf{j}_n(\mathbf{q}) - 1\right)^2 + \left(\mathbf{k}_d^T . \mathbf{k}_n(\mathbf{q}) - 1\right)^2 \tag{3-63}$$

a pro jednotlivé složky gradientu tedy platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{q})}{\partial q_i} = 2\left(\mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}) - \mathbf{p}_{bd}\right)^T . \frac{\partial \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q})}{\partial q_i} &+ 2\left[\left(\mathbf{i}_d^T . \mathbf{i}_n(\mathbf{q}) - 1\right) . \left(\mathbf{i}_d^T . \frac{\partial \mathbf{i}_n(\mathbf{q})}{\partial q_i}\right)\right] + \\ &+ 2\left[\left(\mathbf{j}_d^T . \mathbf{j}_n(\mathbf{q}) - 1\right) . \left(\mathbf{j}_d^T . \frac{\partial \mathbf{j}_n(\mathbf{q})}{\partial q_i}\right)\right] + \\ &+ 2\left[\left(\mathbf{k}_d^T . \mathbf{k}_n(\mathbf{q}) - 1\right) . \left(\mathbf{k}_d^T . \frac{\partial \mathbf{k}_n(\mathbf{q})}{\partial q_i}\right)\right] \end{aligned} \tag{3-64}$$

Jednotlivé parciální derivace vektorů podle zobecněných souřadnic lze poměrně snadno odvodit z fyzikálního významu stejně jako u složek Jakobiovy matice

$$\frac{\partial \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n}(\mathbf{q}) & \text{rotační jednotka} \\ \mathbf{k}_{i-1} & \text{translační jednotka} \end{cases} \tag{3-65}$$

$$\frac{\partial \mathbf{i}_n(\mathbf{q})}{\partial q_i} = \begin{cases} \hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{i}_n(\mathbf{q}) & \text{rotační jednotka} \\ 0 & \text{translační jednotka} \end{cases} \tag{3-66}$$

Po dosazení do (3-64) dostaneme pro jednotlivé složky vektoru $\nabla E(\mathbf{q})$ pro rotační jednotku

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{q})}{\partial q_i} = 2\left(\mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}) - \mathbf{p}_{bd}\right)^T.\left(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n}\right) &+ 2\left[\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n(\mathbf{q}) - 1\right].\left[\mathbf{i}_d^T.\left(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{i}_n(\mathbf{q})\right)\right] + \\ &+ 2\left[\mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n(\mathbf{q}) - 1\right].\left[\mathbf{j}_d^T.\left(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{j}_n(\mathbf{q})\right)\right] + \\ &+ 2\left[\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n(\mathbf{q}) - 1\right].\left[\mathbf{k}_d^T.\left(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{k}_n(\mathbf{q})\right)\right] \end{aligned} \tag{3-67}$$

a pro translační jednotku

$$\frac{\partial E(\mathbf{q})}{\partial q_i} = 2\left(\mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}) - \mathbf{p}_{bd}\right)^T.\left(\hat{\mathbf{k}}_{i-1}.\mathbf{p}_{i-1,n}\right) \tag{3-68}$$

Jak už bylo uvedeno, metody založené na gradientu chyby polohování pohybují fiktivně současně všemi pohybovými jednotkami s krokem $\mathbf{u}$, který je úměrný $\nabla E(\mathbf{q})$. Základní algoritmus iterace je tedy

$$\mathbf{q}^{(k+1)} = \mathbf{q}^{(k)} + \Delta\mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k)} + \alpha^{(k)}.\mathbf{u}^{(k)} \tag{3-69}$$

Metod pro výpočet kroku $\mathbf{u}$ je několik a jsou uvedeny dále. Koeficient α, který je zaveden navíc se nazývá optimální míra kroku a je to číslo, které je pro všechny pohybové jednotky stejné a optimalizuje krok $\mathbf{u}$ podle průběhu funkce $E(\mathbf{q})$ tak, aby bylo v daném kroku nalezeno minimum chyby polohování a byla zaručena konvergence metody. Nejprve je provedeno odvození míry kroku α a dále jsou uvedeny dvě metody nalezení kroku $\mathbf{u}$. Chybu polohy a orientace v daném kroku lze vyjádřit jako funkci jedné proměnné α (při známém kroku $\mathbf{u}$)

$$\Delta P(\alpha) = \left(\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q} + \alpha.\mathbf{u})\right)^T.\left(\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q} + \alpha.\mathbf{u})\right) \tag{3-70}$$

$$\Delta O(\alpha) = \left(\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n(\mathbf{q} + \alpha.\mathbf{u}) - 1\right)^2 + \left(\mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n(\mathbf{q} + \alpha.\mathbf{u}) - 1\right)^2 + \left(\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n(\mathbf{q} + \alpha.\mathbf{u}) - 1\right)^2 \tag{3-71}$$

$$E(\alpha) = \Delta P(\alpha) + \Delta O(\alpha) \tag{3-72}$$

Původně n-rozměrný problém hledání minima funkce $E(\mathbf{q})$ je tak převeden na jednorozměrný problém hledání minima funkce $E(\alpha)$. Hledáme tedy takové α^*, pro které platí

$$E(\alpha^*) = \min E(\alpha) \tag{3-73}$$

Pro velmi malé změny zobecněných souřadnic je možno změnu polohy a orientace koncového bodu vypočítat pomocí Jakobiovy matice

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{p} \\ d\mathbf{o} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_p \\ \mathbf{J}_o \end{bmatrix} .\ d\mathbf{q} \tag{3-74}$$

Jelikož se jedná o metodu iterační, jejíž krok je navíc optimalizován, je možno si dovolit záměnu

$$d\mathbf{q} \to \Delta\mathbf{q} = \alpha.\mathbf{u} \tag{3-75}$$

Pak je možno psát

$$\mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}+\alpha.\mathbf{u}) = \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}) + d\mathbf{p} = \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}) + \left[\mathbf{J}_p\right].\alpha.\mathbf{u} \tag{3-76}$$

$$\mathbf{i}_n(\mathbf{q}+\alpha.\mathbf{u}) = \mathbf{i}_n(\mathbf{q}) + d\hat{\mathbf{o}}.\mathbf{i}_n(\mathbf{q}) \qquad \text{kde } d\mathbf{o} = (\mathbf{J}_o).\alpha.\mathbf{u} \tag{3-77}$$

Po dosazení do $E(\alpha) = \Delta P(\alpha) + \Delta O(\alpha)$ a úpravě dostaneme

$$E(\alpha) = a - 2b\alpha + c\alpha^2 \tag{3-78}$$

kde koeficienty *a, b, c* jsou v daném kroku konstantní a jsou pouze kombinací polohových a jednotkových vektorů v dané výchozí poloze, dále vektoru vyhledávání **u** v dané výchozí poloze a submatic $\mathbf{J}_p, \mathbf{J}_o$ Jakobiovy matice ve výchozí poloze. Platí

$$a = (\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}))^T.(\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q})) + (\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n(\mathbf{q}) - 1)^2 + (\mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n(\mathbf{q}) - 1)^2 + (\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n(\mathbf{q}) - 1)^2 \tag{3-79}$$

$$\begin{aligned} b = {} & (\mathbf{p}_{bd} - \mathbf{p}_{bn}(\mathbf{q}))^T.\left[\mathbf{J}_p\right].\mathbf{u} + \\ & + \left[(\mathbf{i}_d^T.\mathbf{i}_n(\mathbf{q}) - 1).(\hat{\mathbf{i}}_d.\mathbf{i}_n) + (\mathbf{j}_d^T.\mathbf{j}_n(\mathbf{q}) - 1).(\hat{\mathbf{j}}_d.\mathbf{j}_n) + (\mathbf{k}_d^T.\mathbf{k}_n(\mathbf{q}) - 1).(\hat{\mathbf{k}}_d.\mathbf{k}_n)\right]^T.(\mathbf{J}_o).\mathbf{u} \end{aligned} \tag{3-80}$$

$$c = (\left[\mathbf{J}_p\right].\mathbf{u})^T.\left[\mathbf{J}_p\right].\mathbf{u} + \left[(\hat{\mathbf{o}}_u.\mathbf{i}_n)^T.\mathbf{i}_d\right]^2 + \left[(\hat{\mathbf{o}}_u.\mathbf{j}_n)^T.\mathbf{j}_d\right]^2 + \left[(\hat{\mathbf{o}}_u.\mathbf{k}_n)^T.\mathbf{k}_d\right]^2 \tag{3-81}$$

$$\text{kde } \mathbf{o}_u = (\mathbf{J}_o).\mathbf{u} \tag{3-82}$$

Pak pro nalezení minima je možno psát

$$\frac{d^2E(\alpha)}{d\alpha^2} = 2c > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{minimum} \tag{3-83}$$

$$\frac{dE(\alpha)}{d\alpha} = 2(-b + c\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{b}{c} \tag{3-84}$$

Nejprve je tedy na základě dále uvedených metod stanoven vektor vyhledávání (krok) **u**, vypočteny koeficienty *b* a *c* a na jejich základě vypočten koeficient α.

3.3.2.1 Newtonova metoda nalezení vektoru vyhledávání

Provedeme Taylorův rozvoj chyby polohování $E(\mathbf{q})$ jako funkce více proměnných

$$E(\mathbf{q}+\Delta\mathbf{q}) = E(\mathbf{q}) + \nabla E(\mathbf{q})^{T}.\Delta\mathbf{q} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{q}^{T}.\nabla^{2}E(\mathbf{q}).\Delta\mathbf{q} + \ldots \tag{3-85}$$

V dalším použijeme pouze první dva členy Taylorova rozvoje. Jelikož hledáme minimum $E(\mathbf{q}^{*})$, v místě minima je spád (gradient) roven nule, tj. $\nabla E(\mathbf{q}^{*}) = 0$

$$\nabla E(\mathbf{q}+\Delta\mathbf{q}) = \nabla E(\mathbf{q}) + \nabla^{2}E(\mathbf{q})^{T}.\Delta\mathbf{q} = 0 \tag{3-86}$$

z tohoto vztahu vyjádříme $\Delta\mathbf{q}$

$$\Delta\mathbf{q} = -\nabla^{2}E(\mathbf{q})^{-1}.\nabla E(\mathbf{q}) \tag{3-87}$$

pak platí

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k) - \nabla^{2}E(\mathbf{q})^{-1}.\nabla E(\mathbf{q}) \tag{3-88}$$

vztah doplníme mírou kroku α a dostaneme výsledný vztah

$$\mathbf{q}(k+1) = \mathbf{q}(k) - \alpha.\left[\underbrace{\nabla^{2}E(\mathbf{q}(k))^{-1}.\nabla E(\mathbf{q}(k))}_{\mathbf{u}}\right] \tag{3-89}$$

Výraz $\nabla^{2}E(\mathbf{q}) = \mathbf{H}$ se nazývá Hessova matice, je to $n\times n$ symetrická matice, pro jejíž prvky platí

$$h_{ij} = \frac{\partial^{2}E(\mathbf{q})}{\partial q_{i}.\partial q_{j}} \tag{3-90}$$

Metoda velmi dobře konverguje, vyčíslení Hessovy matice a tím i vektoru vyhledávání trvá poněkud déle, proto není přímo vhodná pro řízení v reálném čase.

3.3.2.2 Metoda BFS

Z důvodu pomalého výpočtu matice **H** byla vyvinuta jiná metoda výpočtu vektoru vyhledávání, která byla současně publikována třemi autory, a proto nese společný název BFS (Broyden, Fletcher, Shanno) (Reklaitis, 1983). Výhodou této metody je, že nevyčísluje Hessovu matici, ale nahrazuje ji jinou maticí $\mathbf{A}$, která je rovněž symetrická rozměru $n\times n$ a nazývá se matrice. Pak pro vektor vyhledávání platí

$$\mathbf{u}(k) = -\mathbf{A}(k).\nabla E(\mathbf{q}(k)) \tag{3-91}$$

Pro matici metrice odvodili autoři rekurentní vzorec

$$\mathbf{A}(k+1) = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta\mathbf{q}(k).\Delta\mathbf{g}(k)^{T}}{\Delta\mathbf{q}(k)^{T}.\Delta\mathbf{g}(k)}\right).\mathbf{A}(k).\left(\mathbf{I} - \frac{\Delta\mathbf{q}(k).\Delta\mathbf{g}(k)^{T}}{\Delta\mathbf{q}(k)^{T}.\Delta\mathbf{g}(k)}\right) + \frac{\Delta\mathbf{q}(k).\Delta\mathbf{q}(k)^{T}}{\Delta\mathbf{q}(k)^{T}.\Delta\mathbf{g}(k)} \tag{3-92}$$

kde **I** je jednotková matice $n\times n$

$$\Delta \mathbf{q}^{k} = \mathbf{q}^{k+1} - \mathbf{q}^{k} \tag{3-93}$$

$$\Delta \mathbf{g}^{k} = \nabla E\left(\mathbf{q}^{k+1}\right) - \nabla E\left(\mathbf{q}^{k}\right) \tag{3-94}$$

Algoritmus výpočtu:

1. Známe $\mathbf{q}^{0}$ - výchozí poloha, vypočteme $\nabla E\left(\mathbf{q}^{0}\right)$ v této poloze
2. $\mathbf{u}^{0} = -\nabla E\left(\mathbf{q}^{0}\right)$, $\mathbf{A}^{0} = \mathbf{I}$, vypočteme $\alpha = \dfrac{b}{c}$
3. $\mathbf{q}^{1} = \mathbf{q}^{0} + \alpha^{0}.\mathbf{u}^{0}$, $\Delta \mathbf{q}^{0} = \alpha^{0}.\mathbf{u}^{0}$
4. Vypočteme $\nabla E\left(\mathbf{q}^{1}\right)$, $\Delta \mathbf{g}^{0} = \nabla E\left(\mathbf{q}^{1}\right) - \nabla E\left(\mathbf{q}^{0}\right)$
5. Z rekurentního vzorce vypočteme $\mathbf{A}^{1}$, $\mathbf{u}^{1} = -\mathbf{A}^{1}.\nabla E\left(\mathbf{q}^{1}\right)$
6. vypočteme $\mathbf{q}^{2}$ a dále na 1. dokud není $E\left(\mathbf{q}\right) < \varepsilon$.

Matrice **A** se při výpočtu postupně blíží k hodnotě Hessovy matice **H** v dané žádané poloze. Metoda velmi dobře konverguje pro blízkou výchozí a žádanou polohu koncového bodu a je v této poloze velmi rychlá i pro více stupňů volnosti (n > 8), kdy klasické vektorové metody selhávají. Z uvedených důvodů je pro vzdálenou výchozí a žádanou polohu vhodnější použití metody CCD a pro blízkou výchozí a žádanou polohu vhodnější použití metody BFS. Oba algoritmy lze také kombinovat, čímž lze podstatně zkrátit řešení inverzní kinematické úlohy.

3.4 Vektorová metoda inverzní transformace

Vektorová metoda je odvozena pro danou kinematickou strukturu a je založena na trigonometrických vztazích mezi články a používá vektorový a maticový počet pro doplnění trigonometrických vztahů. Pro vektorovou metodu obecně nemusí být použito Denavit-Hartenbergovy konvence rozmístění souřadných systémů, ale tato konvence je výhodná z hlediska automatického sestavení transformačních matic. Kinematická struktura mechanismu s pěti stupni volnosti a rozmístění souřadných systémů je znázorněno na Obr. 3-14, tabulka parametrů je uvedena v Tab. 3-2.

Tab. 3-2

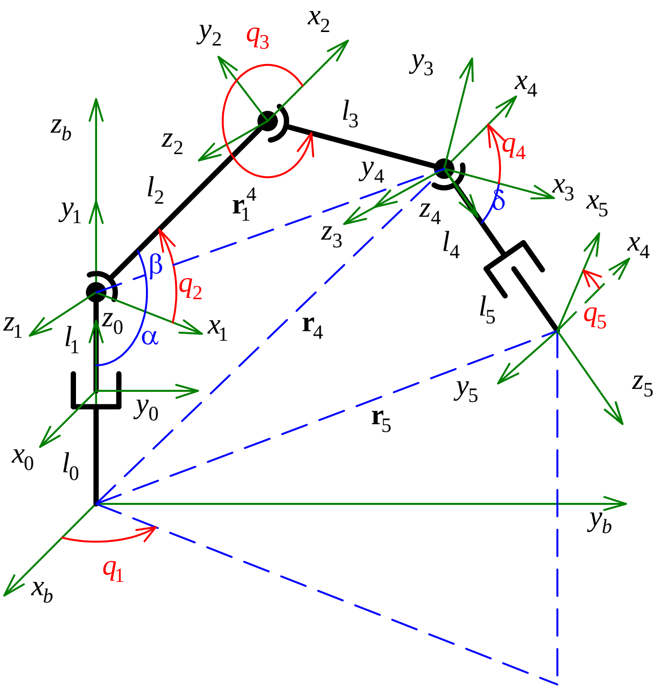
i	ϑ_i	d_i	a_i	α_i
0	0	l_0	0	0
1	q_1	l_1	0	$\pi/2$
2	q_2	0	l_2	0
3	q_3	0	l_3	0
4	q_4	0	0	$\pi/2$
5	q_5	l_4+l_5	0	0

Dosazením parametrů z Tab. 3-2 do obecného vyjádření transformační matice dostaneme jednotlivé transformační matice

$$\mathbf{A}_{b0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-95}$$

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{bmatrix} \cos q_1 & 0 & \sin q_1 & 0 \\ \sin q_1 & 0 & -\cos q_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & l_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-96}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & l_2 \cos q_2 \\ \sin q_2 & \cos q_2 & 0 & l_2 \sin q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-97}$$



Obr. 3-14

$$\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & l_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & l_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-98}$$

$$\mathbf{A}_{34} = \begin{bmatrix} \cos q_4 & 0 & \sin q_4 & 0 \\ \sin q_4 & 0 & -\cos q_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-99}$$

$$\mathbf{A}_{45} = \begin{bmatrix} \cos q_5 & -\sin q_5 & 0 & 0 \\ \sin q_5 & \cos q_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_4 + l_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-100}$$

Jelikož je známa poloha a orientace koncového bodu, je také číselně známa celková transformační matice

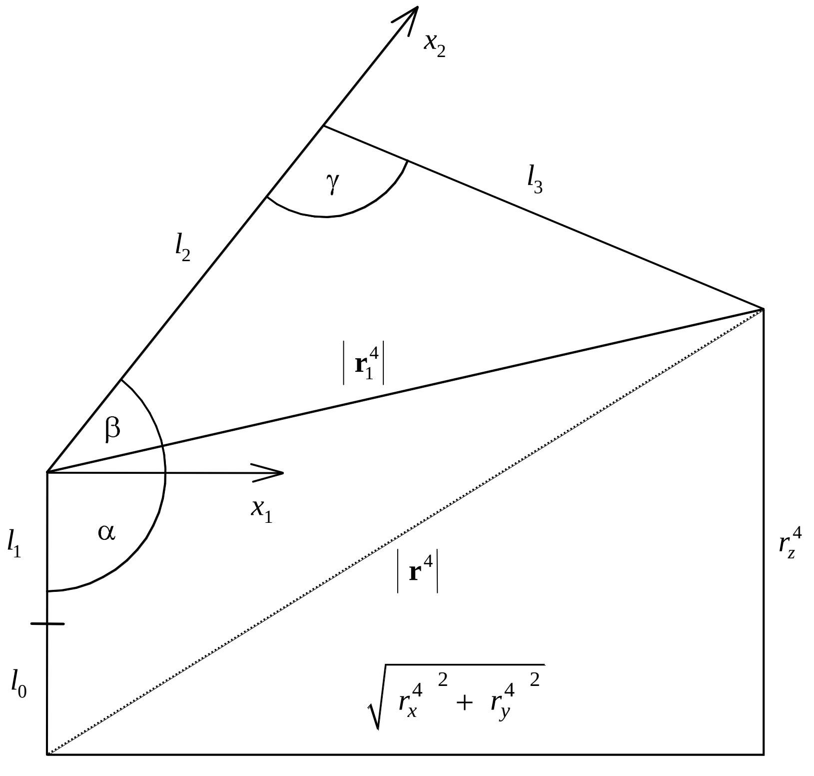
$$\mathbf{T}_{b5} = \begin{bmatrix} i_{5x} & j_{5x} & k_{5x} & r_{5x} \\ i_{5y} & j_{5y} & k_{5y} & r_{5y} \\ i_{5z} & j_{5z} & k_{5z} & r_{5z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-101}$$

1) Výpočet q_1

$$q_1 = \arccos \frac{r_{5x}}{\sqrt{r_{5x}^{\;2} + r_{5y}^{\;2}}} \tag{3-102}$$

kde vektory $\mathbf{r}_5, \mathbf{k}_5$ jsou číselně známy z transformační matice $\mathbf{T}_{b5}$

2) Určení počátku O_4 čtvrtého souřadného systému



Obr. 3-15

$$\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_5 - \;l_4 + l_5\;.\mathbf{k}_5 \tag{3-103}$$

3) Výpočet q_2

a) určení úhlu α (Obr. 3-15)

$$\begin{aligned} r_{14x} &= r_{4x} \\ r_{14y} &= r_{4y} \\ r_{14z} &= r_{4z} - \; l_0 + l_1 \end{aligned} \qquad (3\text{-}104)$$

$$\alpha = \arccos \frac{-\mathbf{k}_0 . \mathbf{r}_{14}}{|\mathbf{r}_{14}|} \qquad (3\text{-}105)$$

b) úhel β je určen z kosinové věty

$$\beta = \arccos \frac{l_3^{\;2} - \; l_2^{\;2} - |\mathbf{r}_{14}|^2}{-2.l_2.|\mathbf{r}_{14}|} \qquad (3\text{-}106)$$

$$q_2 = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2} \qquad (3\text{-}107)$$

4) Výpočet q_3

$$\gamma = \arccos \frac{|\mathbf{r}_{14}|^2 - \; l_3^{\;2} - \; l_2^{\;2}}{-2.l_2.l_3} \qquad (3\text{-}108)$$

$$q_3 = \pi + \gamma \qquad (3\text{-}109)$$

4) Výpočet q_4

a) výpočet $\mathbf{T}_{b3} \; q_1, q_2, q_3$, první sloupec matice dává $\mathbf{i}_3$

b) δ je úhel mezi $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_5$ a $\mathbf{i}_3$

$$\delta = \arccos \; \mathbf{k}_5 . \mathbf{i}_3 \qquad (3\text{-}110)$$

$$q_4 = \frac{\pi}{2} - \delta \qquad (3\text{-}111)$$

5) Výpočet q_5

q_5 je úhel mezi $\mathbf{i}_4$ a $\mathbf{i}_5$ a je stejný jako úhel mezi $\mathbf{k}_3$ a $\mathbf{j}_5$. Pak

$$q_5 = \arccos \; \mathbf{k}_3 . \mathbf{j}_5 \qquad (3\text{-}112)$$

Rychlost výpočtu lze významně zvýšit použitím rekurentního Rodrigova vztahu pro výpočet vektorů $\mathbf{i}_3$ a $\mathbf{k}_3$ místo relativně zdlouhavého a nepřesného násobení transformačních matic

$$\mathbf{i}_i = \mathbf{i}_{i-1} . \cos \vartheta_i + \; \mathbf{k}_{i-1} \times \mathbf{i}_{i-1} \; . \sin \vartheta_i \qquad (3\text{-}113)$$

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_{i-1} . \cos \alpha_i + \; \mathbf{i}_i \times \mathbf{k}_{i-1} \; . \sin \alpha_i \qquad (3\text{-}114)$$

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{k}_i \times \mathbf{i}_i \qquad (3\text{-}115)$$

Výpočet lze snadno programovat, je velmi rychlý a tato metoda bývá nejčastěji použita pro účely řízení polohy v reálném čase. Programově je nutno ošetřit výjimečné polohy článků, kdy trojúhelníky a s nimi trigonometrické vztahy degenerují a je nutno v těchto polohách interpolovat z okolních hodnot. Vektor zobecněných souřadnic je nutno přepočíst pomocí převodových poměrů rotačních a translačních jednotek na úhlové hodnoty natočení jednotlivých pohonů (při použití rotačních pohonů), které vstupují jako žádané hodnoty pro regulaci polohy.

3.5 Řešení inverzní úlohy kinematiky v prostředí systému Pro/Engineer

Většina CAD systémů dokáže řešit inverzní úlohu kinematiky, kdy se pohybuje koncový bod mechanismu, ostatní články zůstávají zapojeny v sériové kinematické struktuře a v souladu s pohybem koncového bodu se také pohybují a natáčí. Příklad řešení této úlohy v prostředí systému Pro/Engineer je ukázán na následující animaci

..\Animace\3DOF_inverzni_uloha\3DOF_inverzni_uloha.mp4

Shrnutí kapitoly

V této kapitole bylo popsáno několik způsobů řešení inverzní úlohy kinematiky – tedy úlohy, kdy je známa poloha koncového bodu a orientace posledního článku, resp. nástroje a jsou hledány jednotlivé kloubové proměnné (zobecněné souřadnice) natočení a posunutí jednotlivých článků. Výběr metody závisí na počtu stupňů volnosti a na aplikaci, pro kterou je řešení hledáno. Pro účely výpočtů a modelování je možno použít optimalizačních metod, pro účely řízení je nejvhodnější použití vektorové metody, také se při rychlosti dnešních řídicích počítačů dají použít aproximační metody, ovšem s tím, že aproximační metody jsou použitelné pouze do šesti stupňů volnosti.

Otázky

1. Inverzní úloha kinematiky, aproximace pomocí Taylorova rozvoje transformační matice. Popište princip metody
2. Jakobiho matice a její aplikace.
3. Inverzní úloha kinematiky, Newtonova aproximační metoda. Popište princip metody
4. Optimalizační metody řešení inverzní úlohy kinematiky, metoda heuristická. Popište princip metody
5. Optimalizační metody řešení inverzní úlohy kinematiky, metoda gradientní. Popište princip metody

4 PLÁNOVÁNÍ TRAJEKTORIE POHYBOVÝCH JEDNOTEK

Čas ke studiu: 1 hodina

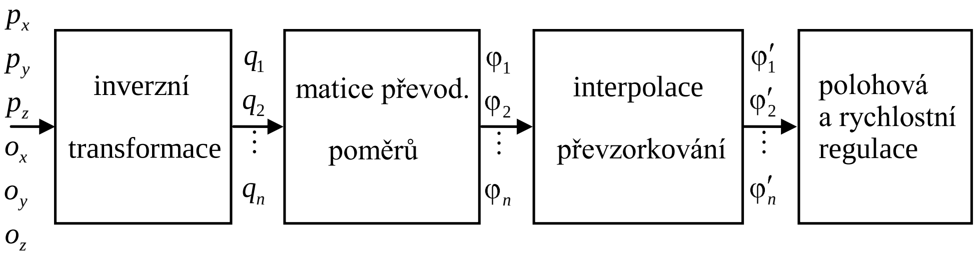
Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- na základě výsledků řešení inverzní úlohy jsou získány diskrétní hodnoty poloh jednotlivých kloubů. Pro účely řízení je potřeba z těchto průběhů vypočítat spojité náhradní (interpolační) funkce, pro účely případného převzorkování a také pro účely výpočtu průběhů ruchlosti a zrychlení kloubů pro další dynamický model mechanismu,
- využít několik způsobů interpolace průběhu polohy a výpočtu průběhů rychlosti a zrychlení kloubů – interpolace lineární, kvadratickou a kubickou funkcí

Výklad

Uvedené metody inverzní transformace vedou v zásadě ke stejnému výsledku a to k vektoru zobecněné souřadnice **q**, který odpovídá dané poloze a orientaci koncového bodu. Výchozími údaji pro dynamický model, popř. pro syntézu regulátorů ale je průběh polohy, rychlosti a zrychlení jednotlivých pohybových jednotek. Průběhu polohy a orientace koncového bodu v čase tedy odpovídají průběhy polohy jednotlivých pohybových jednotek. Problém je v tom, že průběhy polohy dostaneme jako spojité (alespoň po částech) pouze při použití vektorové metody, ostatní prezentované iterační metody se dají použít pouze pro diskrétní body. Většinou se tento problém řeší tak, že se trajektorie koncového bodu rozdělí na malé inkrementy, pro tyto diskrétní body je proveden výpočet vektoru zobecněných proměnných **q** a diskrétní body průběhu polohy jednotlivých pohybových jednotek se proloží vhodnou interpolační funkcí. Výhodou vhodné interpolační funkce je možnost provedení její první a dru$T_v$hé derivace v čase a tím získání průběhů rychlosti a zrychlení jednotlivých pohybových jednotek, které je nezbytné pro syntézu dynamického modelu mechanismu, popř. syntézu regulátorů.

Pojem „plánování trajektorie" je spíše z oblasti řízení a robotiky a je to vytvoření vnitřní systémové interpretace požadované trajektorie koncového bodu. Většina robotických systémů umožňuje zadávaní trajektorie učením, kdy je robot ručně naváděn do žádaných bodů trajektorie, nebo přímým zadáváním souřadnic koncového bodu a orientace nástroje, popř. kombinací obou způsobů. Takto zavedené body trajektorie je možno spojovat přímkovými a kruhovými úseky s definovanou návazností, popř. proložit vhodnou interpolační funkcí. Teprve po vytvoření vnitřního matematického popisu trajektorie je tato trajektorie vzorkována s periodou, která je dána rychlostí výpočtu inverzní kinematické úlohy. Je vytvořena posloupnost bodů jednotlivých úseků (segmentů) trajektorie a tyto body jsou přepočítány inverzní transformací na žádané hodnoty polohy - tzv. uzlové body pro jednotlivé pohybové osy. Při plánování trajektorie jsou také ošetřeny náhlé změny směru a rychlosti koncového bodu tak, aby nebylo překonáno maximální povolené zrychlení pohybových os vzhledem k omezené přetížitelnosti pohonů a měničů a vzhledem k dimenzování prvků mechanického subsystému. Takto upravená trajektorie pohybových jednotek se po složení pohybu projeví v rozdílu mezi ideální a skutečnou trajektorií koncového bodu.



Obr. 4-1

4.1 Interpolace na úrovni kloubů

Metody interpolace jsou stejné jak pro potřeby syntézy dynamického modelu, tak pro účely řízení pohybových jednotek. Pro účely řízení je většinou potřeba menší časový interval mezi jednotlivými vzorky (minimální frekvence vzorkování je 100 Hz, pro kvalitní řídicí systémy je ale mnohem vyšší), pro účely dynamického modelu, tj. výpočtu průběhů reakcí, stačí vzorkování s periodou kolem 100 *ms*. Závisí to na dynamické náročnosti trajektorie, protože při rychlých dynamických změnách se mohou špičky zrychlení (a tím i reakcí) ocitnout mezi jednotlivými uzlovými body a tím jsou skryty. Podmínkou pro volbu aproximační funkce je průchod všemi uzlovými body segmentu, jen ve zjednodušených úlohách je možno připustit odchylku od uzlových hodnot. Přitom kritériem volby vhodné interpolační nebo aproximační funkce je nejen dosažení co největší přesnosti polohování, ale také nároky na výpočetní možnosti případného řídicího systému. Kontrolu správnosti volby interpolační nebo aproximační funkce je možno provést zpětně pouze přímou transformací diskrétních hodnot kloubových proměnných mezi uzly na polohu a orientaci koncového bodu mechanismu a vyhodnocením chyby polohování. Pro interpolaci trajektorie mezi uzlovými body volíme systém jednoduchých základních funkcí takových, které lze snadno vypočítat pomocí jednoduchých a rychlých operací na řídícím počítači, tj. sčítání a násobení. Průběh trajektorie mezi uzlovými body pak interpolujeme pomocí polynomu, vytvořeného lineární kombinací těchto jednoduchých základních funkcí

$$Q_k(t) = C_0 + C_1(t_k - t) + C_2(t_k - t)^2 + \ldots + C_n(t_k - t)^n \tag{4-1}$$

Řešení interpolační funkce mezi uzlovými body tedy spočívá ve stanovení řádu interpolační funkce podle výkonnosti počítače a v nalezení koeficientů C_0 až C_n. Mezi výhody při používání polynomiálních funkcí patří především to, že se dají plně popsat konečným počtem údajů (stupeň, koeficienty) a že se jejich hodnoty dají bez problémů počítat konečným počtem aritmetických operací. Zvyšování stupně aproximujícího polynomu nepřináší vždy zvýšení přesnosti aproximace. Při aproximaci polynomy vyšších stupňů, zejména při ekvidistantních uzlech, malá nepřesnost ve vstupních datech působí velké chyby v hodnotě interpolačního polynomu. Zejména pro $n>5$ se projevuje nepřesnost výpočtu v jednoduché aritmetice, vliv zaokrouhlování a průběh aproximační funkce mezi uzlovými body může být značně zvlněný. Z praktických důvodů - kompromis mezi složitostí polynomu a z toho plynoucí časovou náročností na výpočet, přesností a požadavkem na hladkost aproximační funkce - volíme $n \leq 3$ a pracujeme tedy jen s podmnožinou uzlových bodů segmentu, kterou postupně posouváme po segmentu.

4.1.1 Interpolace trajektorie lineární funkcí

Tato metoda interpolace je používána zejména u starších řídicích systémů s malým výpočetním výkonem. Trajektorie kloubové proměnné mezi uzlovými body je interpolována přímkou, tomu odpovídá konstantní hodnota rychlosti mezi jednotlivými uzly s nespojitostmi v uzlech a nulová hodnota zrychlení mezi uzly a teoreticky nekonečný impuls zrychlení v uzlech. Průběh rychlosti v časovém intervalu vzorkování t_k, t_{k+1} mezi uzly k a k+1 je konstantní a je dán

$$\dot{Q}_k \ t \ = \frac{q_{k+1} - q_k}{t_{k+1} - t_k} = \frac{q_{k+1} - q_k}{T_v} \tag{4-2}$$

Tomu odpovídá průběh trajektorie

$$Q_k \ t \ = \int \dot{Q}_k \ t \ dt = \frac{q_{k+1} - q_k}{T_v} t + C_0 \tag{4-3}$$

Integrační konstantu dostaneme z okrajových podmínek

$$Q_k \ t_k \ = q_k = \frac{q_{k+1} - q_k}{T_v} t_k + C_0 \tag{4-4}$$

$$C_0 = q_k - \frac{q_{k+1} - q_k}{T_v} t_k \tag{4-5}$$

a po dosazení do (4.109) dostaneme pro průběh trajektorie

$$Q_k \ t \ = q_k + \frac{q_{k+1} - q_k}{T_v} \ t - t_k \tag{4-6}$$

Z hlediska fyzikálního modelu je toto řešení velmi zjednodušující, skokové změně rychlosti odpovídá skoková změna kinetické energie, kterou soustava není schopna vykonat, a nekonečné hodnotě zrychlení v uzlových bodech odpovídají nekonečně velké momenty popř. síly poháněcích jednotek. Reálný mechanický systém není schopen tento průběh trajektorie realizovat a přesto, že uzlové body jsou velmi blízké, může vést tento způsob interpolace spolu s ostatními vlivy ke kmitání článků. Pro odstranění uvedených obtíží používají některé systémy lineární interpolaci s vyhlazením kvadratickou funkcí jen v úzkém okolí uzlových bodů (Taylor, 1983). Přes uvedené nedostatky byl tento systém často používán u klasických řídicích systémů s řízením jen na základě kinematických veličin, kde všechny momenty způsobené dynamikou pohybu vystupují jako poruchové veličiny a je úkolem regulátorů je vyrovnat.

4.1.2 Interpolace trajektorie kvadratickou funkcí

Trajektorie kloubové proměnné mezi uzlovými body je interpolována kvadratickým průběhem, průběh rychlosti je lineární, zrychlení mezi uzlovými body je konstantní s nespojitostmi v uzlových bodech. Pro rychlost mezi uzlovými body platí

$$\dot{Q}_k(t) = v_k + \frac{v_{k+1} - v_k}{t_{k+1} - t_k}.(t - t_k) = \frac{v_k(t_{k+1} - t) + v_{k+1}(t - t_k)}{T_v} \tag{4-7}$$

kde v_k a v_{k+1} jsou rychlosti v uzlových bodech. Pro konstantní zrychlení mezi uzlovými body platí

$$\ddot{Q}_k(t) = \frac{v_{k+1} - v_k}{T_v} = a_k \tag{4-8}$$

Rychlosti v uzlech v_k a v_{k+1} zatím neznáme. Integrací (4-7) obdržíme průběh dráhy

$$Q(t) = \int \dot{Q}(t)\,dt = -\frac{v_k}{2T_v}.(t_{k+1}-t)^2 + \frac{v_{k+1}}{2T_v}.(t-t_k)^2 + C_0 \tag{4-9}$$

Integrační konstantu dostaneme z okrajových podmínek v uzlových bodech dráhy v časech t_k a t_{k+1}

$$Q_k(t_k) = q_k = -\frac{v_k}{2}.T_v + C_0 \tag{4-10}$$

$$Q_k(t_{k+1}) = q_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{2}.T_v + C_0 \tag{4-11}$$

Odečtením rovnic (4-10) a (4-11) dostaneme rekurentní vzorec pro výpočet v_{k+1} na základě v_k

$$v_{k+1} = \frac{2(q_{k+1}-q_k)}{T_v} - v_k \tag{4-12}$$

Sečtením rovnic (4-10) a (4-11) dostaneme

$$q_{k+1} + q_k = \frac{v_{k+1}-v_k}{2}.T_v + 2C_0 \tag{4-13}$$

$$C_0 = \frac{q_{k+1}+q_k}{2} - \frac{v_{k+1}-v_k}{4}.T_v \tag{4-14}$$

dosazením (4-14) do vztahu (4-9) pro dráhu dostaneme

$$Q_k(t) = -\frac{v_k}{2T_v}.(t_{k+1}-t)^2 + \frac{v_{k+1}}{2T_v}.(t-t_k)^2 + \frac{q_{k+1}+q_k}{2} - \frac{v_{k+1}-v_k}{4}.T_v \tag{4-15}$$

Z hlediska fyzikálního modelu toto řešení mnohem lépe vyhovuje, jednotlivé úseky dráhy mezi uzlovými body na sebe hladce navazují (spojitá první derivace funkce dráhy), průběh rychlosti mezi uzlovými body je aproximován přímkou a zrychlení mezi uzlovými body je konstantní a v uzlových bodech se mění skokově, což je ekvivalentní požadavku skokové změny momentu nebo síly na pohonu. Jelikož reálná mechanická soustava nemůže sledovat skokové změny, vznikají kolem uzlových bodů přechodové děje, které řeší regulátor a tomu odpovídají nepřesnosti v dosažení předepsané polohy a orientace koncového bodu v uzlech. Tento způsob aproximace je nejvíce používán, protože je kompromisem mezi přesností fyzikálního modelu a rychlostí výpočtu. Na rozdíl od interpolace trajektorie přímkou, poskytuje tento výpočet také hodnoty rychlosti a zrychlení pro řízení na základě dynamického modelu mechanismu.

4.1.3 Interpolace průběhu trajektorie kubickou funkcí

Trajektorie kloubové proměnné mezi uzlovými body je interpolována polynomem 3. stupně, který lépe vyhovuje z fyzikálního hlediska. Zejména je odstraněn nespojitý průběh zrychlení a tomu odpovídající skokové změny žádané hodnoty síly, či momentu, které reálná soustava nedokáže realizovat. Průběh trajektorie kloubové proměnné mezi uzly k a k+1 aproximujeme spojitou funkcí $Q_k(t)$, která je polynomem 3. stupně, průběh rychlosti je kvadratický, zrychlení má lineární průběh. Všechny tyto funkce jsou spojité na celém segmentu trajektorie a z podmínky spojitosti průběhu zrychlení na celém segmentu vyplývá, že průběhy rychlosti a dráhy mezi uzlovými body na sebe hladce navazují. Interpolační funkce na každém dílčím intervalu je dána polynomem 3. stupně se čtyřmi neznámými koeficienty. Při interpolaci mezi dvěma uzlovými body není k dispozici dostatek parametrů, proto musí být použit ještě jeden předchozí uzlový bod. Pro dva intervaly tedy potřebujeme 8 podmínek. Podmínky spojitosti dráhy, rychlosti a zrychlení v uzlech dávají 3 podmínky, interpolační podmínky průchodu uzlovými body dávají dalších 3 podmínky. Chybějící dvě okrajové podmínky dodáme ze znalosti rychlosti a zrychlení v předchozím uzlovém bodě. Získání těchto dvou podmínek je při posouvání trojice uzlových bodů po segmentu dráhy jednoduché, protože vyplývají z předchozích výpočtů. Problémy nastávají ale na začátku segmentu, kdy předchozí bod není k dispozici. Při startu je nutno nejprve zavést interpolaci polynomem druhého stupně a pak přejít na interpolaci polynomem třetího stupně. Pro aproximaci průběhu zrychlení na intervalu času $\langle t_k, t_{k+1} \rangle$ mezi uzlovými body q_k a q_{k+1} platí

$$\ddot{Q}_k(t) = a_k + \frac{a_{k+1} - a_k}{t_{k+1} - t_k}.(t - t_k) = \frac{a_k (t_{k+1} - t) + a_{k+1}(t - t_k)}{T_v} \qquad (4\text{-}16)$$

kde pro uzlové body platí

$$a_k = \ddot{Q}(t_k) = \ddot{q}(t_k) \qquad (4\text{-}17)$$

$$a_{k+1} = \ddot{Q}(t_{k+1}) = \ddot{q}(t_{k+1}) \qquad (4\text{-}18)$$

$$T_v = t_{k+1} - t_k \qquad (4\text{-}19)$$

Integrací rovnice (4-16) dostaneme vztah pro interpolaci rychlosti a dráhy

$$\dot{Q}(t) = \int \ddot{Q}(t)\, dt = -\frac{a_k}{2T_v}.(t_{k+1} - t)^2 + \frac{a_{k+1}}{2T_v}.(t - t_k)^2 + C_1 \qquad (4\text{-}20)$$

$$Q_k(t) = \int \dot{Q}(t)\, dt = \frac{a_k}{6T_v}.(t_{k+1} - t)^3 + \frac{a_{k+1}}{6T_v}.(t - t_k)^3 + C_1.t + C_0 \qquad (4\text{-}21)$$

Integrační konstanty dostaneme z podmínky požadovaného průchodu interpolační funkce uzlovými body, tj. dosazením počátečních podmínek

$$Q_k(t_k) = q(t_k) = q_k \qquad (4\text{-}22)$$

$$Q_k(t_{k+1}) = q(t_{k+1}) = q_{k+1} \qquad (4\text{-}23)$$

do rovnice (4-21). Obdržíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$q_k = \frac{a_k}{6T_v}(t_{k+1} - t_k)^3 + C_1 t_k + C_0 = \frac{a_k}{6} T_v^2 + C_1 t_k + C_0 \qquad (4\text{-}24)$$

$$q_{k+1} = \frac{a_k}{6T_v}(t_{k+1} - t_{k+1})^3 + \frac{a_{k+1}}{6T_v}(t_{k+1} - t_k)^3 + C_1 t_{k+1} + C_0 = \frac{a_k + 1}{6} T_v^2 + C_1 t_{k+1} + C_0 \qquad (4\text{-}25)$$

odečtením (4-24) od (4-25) dostaneme

$$q_{k+1} - q_k = \frac{1}{6}(a_{k+1} - a_k).T_v^2 + C_1 T_v \qquad (4\text{-}26)$$

z toho plyne

$$C_1 = \frac{q_{k+1} - q_k}{T_v} - \frac{1}{6}(a_{k+1} - a_k) T_v \qquad (4\text{-}27)$$

sečtením rovnic (4-24) a (4-25) dostaneme

$$q_{k+1}+q_k=\frac{1}{6}\left(a_{k+1}+a_k\right)T_v^2+C_1\left(t_{k+1}+t_k\right)+2C_0 \tag{4-28}$$

$$C_0=\frac{1}{2}\left[q_{k+1}+q_k-\frac{a_{k+1}+a_k}{6}.T_v^2-C_1\left(t_{k+1}+t_k\right)\right] \tag{4-29}$$

po dosazení (4-27) do (4-29)

$$\begin{aligned}C_0&=\frac{1}{2}\left[q_{k+1}+q_k-\frac{a_{k+1}+a_k}{6}.T_v^2-\frac{q_{k+1}-q_k}{t_{k+1}-t_k}.\left(t_{k+1}+t_k\right)+\right.\\&\left.+\frac{1}{6}\left(a_{k+1}-a_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)\left(t_{k+1}+t_k\right)\right]=\\&=\frac{1}{2}\frac{\left(q_{k+1}+q_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)-\left(q_{k+1}-q_k\right)\left(t_{k+1}+t_k\right)}{T_v}-\\&-\frac{1}{12}\left[\left(a_{k+1}+a_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)-\right.\\&\left.-\left(a_{k+1}-a_k\right)\left(t_{k+1}+t_k\right)\left(t_{k+1}-t_k\right)\right]\end{aligned} \tag{4-30}$$

Druhou část výrazu (4-30) upravíme podle vzorce

$$\left(a+b\right)\left(c-d\right)-\left(a-b\right)\left(c+d\right)=2\left(bc-ad\right) \tag{4-31}$$

$$\begin{aligned}C_0&=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\left(q_k.t_{k+1}-q_k.t_k\right)}{T_v}-\frac{2}{6}\left(a_k.t_{k+1}-a_{k+1}.t_k\right)T_v\right\}=\\&=\frac{q_k.t_{k+1}-q_{k+1}.t_k}{T_v}-\frac{1}{6}\left(a_k.t_{k+1}-a_{k+1}.t_k\right).T_v\end{aligned} \tag{4-32}$$

Dosazením (4-27) a (4-30) do (4-21)

$$Q_k\left(t\right)=\frac{a_k}{6T_v}\left(t_{k+1}-t\right)^3+\frac{a_{k+1}}{6T_v}\left(t-t_k\right)^3+\left(\frac{q_{k+1}}{T_v}-\frac{T_v.a_{k+1}}{6}\right)\left(t-t_k\right)+\left(\frac{q_k}{T_v}-\frac{T_v.a_k}{6}\right)\left(t_{k+1}-t\right) \tag{4-33}$$

Dosazením (4-27) do (4-20)

$$\dot{Q}_k\left(t\right)=-\frac{a_k}{2T_v}\left(t_{k+1}-t\right)^2+\frac{a_{k+1}}{2T_v}\left(t-t_k\right)^2+\frac{q_{k+1}-q_k}{T_v}-\frac{1}{6}\left(a_{k+1}-a_k\right)T_v \tag{4-34}$$

Známe tedy průběh hodnot spojitých funkcí dráhy (4-33), rychlosti (4-34) a zrychlení (4-16) v závislosti na čase na k-tém intervalu, tj. mezi uzlovými body q_k a q_{k+1}. Až dosud jsme předpokládali, že známe také hodnoty zrychlení a_k a a_{k+1} v těchto uzlových bodech, s jejichž pomocí jsme funkce (4-33), (4-34) a (4-16) vyjádřili. Hodnoty zrychlení je ale nutno vypočítat z okrajových podmínek v uzlových bodech. Vyjdeme z podmínky spojitosti rychlosti k-1 a k-tého intervalu v čase t_k a ve vztahu (4-34) použijeme substituci $k=k-1,\ k+1=k$ pro vyjádření $\dot{Q}_{k-1}\left(t\right)$

$$\dot{Q}_{k-1}\left(t\right)=-\frac{a_{k-1}}{2T_v}\left(t_k-t\right)^2+\frac{a_k}{2T_v}\left(t-t_{k-1}\right)^2+\frac{q_k-q_{k-1}}{T_v}-\frac{1}{6}\left(a_k-a_{k-1}\right)T_v \tag{4-35}$$

Dále vyjádříme $\dot{Q}_{k-1}\ t_k$ a z podmínky spojitosti rychlosti v čase t_k, tj. $\dot{Q}_{k-1}\ t_k = \dot{Q}_k\ t_k$ obdržíme rekurentní vztah pro výpočet a_{k+1}

$$-\frac{a_k}{2}T_v + \frac{q_k - q_{k-1}}{T_v} - \frac{a_k - a_{k-1}}{6}T_v = -\frac{a_k}{2}T_v + \frac{q_{k+1} - q_k}{T_v} - \frac{a_{k+1} - a_k}{6}T_v \tag{4-36}$$

a po úpravě

$$a_{k+1} = 6\left(\frac{q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}}{T_v^2}\right) - 4a_k - a_{k-1} \tag{4-37}$$

Na počátku pohybu vyjdeme ze známé hodnoty zrychlení a_0 v čase t_0 pro k=0 (interpolace kvadratickou funkcí) a ze známé hodnoty počáteční rychlosti v_0 (pro začínající pohyb $v_0 = 0$). Počáteční rychlost v_0 dosadíme do vztahu (4-34)

$$\dot{Q}_0\ t_0 = v_0 = -\frac{a_0}{2}T_v + \frac{q_1 - q_0}{T_v} - \frac{a_1 - a_0}{6}T_v \tag{4-38}$$

Ze vztahu (4-38) vyjádříme a_1 a při znalosti a_0 je možno pokračovat rekurentním vzorcem (4-37). Interpolace kubickou funkcí se nejlépe přibližuje k fyzikálnímu modelu a proto je vhodná zejména pro výpočty v oblasti dynamiky mechanismů a méně vhodná pro potřeby řízení v reálném čase.

Shrnutí kapitoly

V této kapitole bylo popsáno několik způsobů interpolace (proložení) diskrétních hodnot polohy jednotlivých kloubových proměnných – tzv. uzlových bodů, získaných řešením inverzní úlohy kinematiky. Výběr stupně polynomu závisí na rychlosti řídicího počítače, nejlépe odpovídá skutečnosti interpolace průběhu polohy kubickou funkcí, průběh rychlosti je pak parabolický a průběh zrychlení lineární. Při použití polynomu druhého stupně – tedy kvadratické funkce pro interpolaci průběhu polohy, pak je průběh rychlosti proložen lineární funkcí, což ještě nevadí, ale průběh zrychlení kloubů je pak skokový (stupňovitý). Takovému průběhu odpovídá i skoková změna momentu pohonů a tohoto průběhu není možno fyzikálně dosáhnout. Výpočet je sice rychlejší, ale výsledek neodpovídá realitě a je možno tento způsob použít pro dynamicky méně náročné trajektorie. Nejrychlejší z hlediska výpočtu je interpolace polohy lineární funkcí, průběh rychlosti je pak skokový a tomu odpovídá impulzní průběh rychlosti. Tento způsob z fyzikálního hlediska nejméně odpovídá realitě.

Otázky

1. Jaká je fyzikální interpretace jednotlivých způsobů interpolace ve vztahu k reálným pohonům?
2. Jaký stupeň polynomu je optimální vzhledem k přesnosti a rychlosti výpočtu?

5 VÝPOČET RYCHLOSTI A ZRYCHLENÍ ČLÁNKŮ

Čas ke studiu: 1 hodina

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

Na základě výsledků výpočtů dle předchozí kapitoly jsou známy průběhy polohy, rychlosti a zrychlení jednotlivých kinematických dvojic. Alternativně lze získat tyto průběhy pomocí numerické derivace v prostředí Mathcadu. Na základě průběhů polohy, rychlosti a zrychlení kloubů jsou dále vypočteny

- úhlové rychlosti jednotlivých článků (stejné pro všechny body na článku)
- translační rychlosti počátků lokálních souřadných systémů (různé pro počátek souř. systému a např. těžiště – různá vzdálenost od osy otáčení)
- úhlová zrychlení článků
- translační zrychlení počátků souřadných systémů
- translační rychlosti těžišť jednotlivých článků
- translační zrychlení težišť jednotlivých článků

Výklad

Na základě řešení inverzní kinematické úlohy známe časové průběhy vektoru zobecněné souřadnice a jeho derivace $\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$, tj. průběh polohy, rychlosti a zrychlení jednotlivých kinematických dvojic (kloubů). Pro sestavení dynamického modelu mechanického subsystému a zejména pro výpočet reakcí v jednotlivých pohybových jednotkách je zapotřebí určit rychlosti a zrychlení těžišť jednotlivých článků. Na Obr. 5-1 je znázorněn příklad jednoduchého mechanismu, na kterém bude ukázáno odvození potřebných kinematických veličin. Pro vyjádření vektorů jsou použity obvyklé ortogonální souřadnice a všechny vektory jsou vyjádřeny ve složkách základního souřadného systému. Lokální souřadné systémy LCS_1 až LCS_3 jsou umístěny pro jednoduchost v souladu se zásadami Denavit-Hartenberga. Nejprve budou odvozeny rekurentní vzorce pro výpočet kinematických veličin lokálních souřadných systémů. Jelikož všechny kinematické veličiny jsou v našem případě funkcí času, v dalším výkladu je pro přehlednost upuštěno od vyjádření časové funkce, tedy místo $\omega_i(t)$ je použito ω_i apod. V kapitolách 5 a 6 nejsou používány homogenní souřadnice a proto je pro vyjádření vektorových operací pro větší názornost upuštěno od maticového vyjádření a je použito klasických symbolů $\times$ pro vektorový součin a . (tečka – násobení) pro skalární součin.

5.1 Výpočet úhlové rychlosti ω_i *LCS i*-tého článku mechanismu

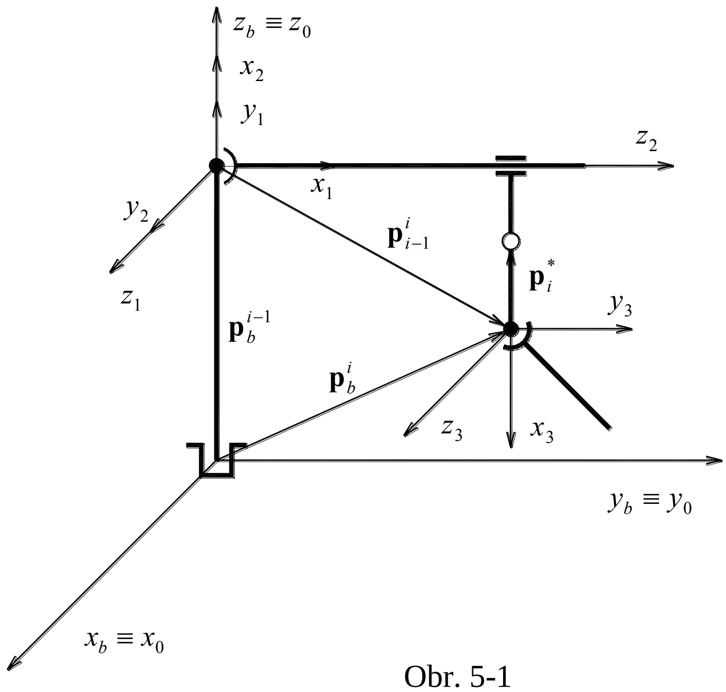
Úhlová rychlost každého hmotného bodu článku i jeho lokálního souřadného systému je stejná a je vyjádřena jednoduchým rekurentním vztahem

$$\omega_i = \omega_{i-1} + \omega_{i-1}^{i} \qquad (5\text{-}1)$$

kde ω_i je úhlová rychlost i-tého *LCS* daného článku, ω_{i-1} je úhlová rychlost *LCS* předchozího článku, ω_{i-1}^{i} je relativní úhlová rychlost dvou *LCS* sousedních článků, kterou je možno vyjádřit jednoduchým vztahem

$$\omega_{i-1}^{i}\begin{cases}\mathbf{k}_{i-1}.\dot{q}_i & \mathrm{R}\\ 0 & \mathrm{T}\end{cases} \tag{5-2}$$

Pro rotační jednotku je tedy absolutní velikost relativní úhlové rychlosti dána úhlovou rychlostí i-tého článku vůči i-1 článku a její směr leží v ose otáčení, tj. ve směru vektoru $\mathbf{k}_{i-1}$. V případě translační pohybové jednotky je vzájemná úhlová rychlost nulová, oba sousední články se pohybují stejnou úhlovou rychlosti. Úhlová rychlost nultého souřadného systému je nulová (nultý souřadný systém se nepohybuje). Pro uvedený příklad se úhlová rychlost jednotlivých článků a jejich lokálních souřadných systémů vypočte následovně



Obr. 5-1

$$\omega_0=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\ \omega_1=\omega_0+\omega_0^1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\mathbf{k}_0.\dot{q}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.\dot{q}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{bmatrix} \tag{5-3}$$

obdobně pro druhý článek a LCS_2 platí

$$\omega_2=\omega_1+\omega_1^2=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{bmatrix}+\mathbf{k}_1.\dot{q}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{q}_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sin q_1\\\dot{q}_2.\cos q_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot{q}_2.\sin q_1\\\dot{q}_2.\cos q_1\\\dot{q}_1\end{bmatrix} \tag{5-4}$$

$$\omega_3=\omega_2+\omega_2^3=\omega_2 \tag{5-5}$$

Směry vektorů **k** jsou nalezeny z odpovídajících sloupců příslušných transformačních matic. Takto lze snadno vyjádřit úhlové rychlosti všech lokálních souřadných systémů a tedy i článků mechanismu od základny až po koncový bod.

5.2 Výpočet translační rychlosti $\mathbf{v}_i$ *LCS i*-tého článku mechanismu

Odvození rekurentního vtahu pro výpočet translační rychlosti počátku lokálního souřadného systému vychází z vyjádření polohového vektoru počátku *i*-tého *LCS* jako součtu polohového vektoru počátku předcházejícího *LCS* a polohového vektoru mezi těmito dvěma *LCS*. Na Obr. 5-1 je uveden příklad pro i = 3.

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{p}_{i-1}^i \tag{5-6}$$

Pro odvození translační rychlosti je nutné provést derivaci rovnice (5-6) podle času t

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_{i-1}}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_{i-1}^i}{dt} \tag{5-7}$$

Fyzikální význam derivace polohového vektoru podle času je translační rychlost jeho koncového bodu a tedy translační rychlost počátku příslušného lokálního souřadného systému. Pak tedy je možno psát

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \frac{d\mathbf{p}_{i-1}^i}{dt} \tag{5-8}$$

Translační rychlost $\mathbf{v}_i$ je opět počítána v rekurentním vztahu počínaje od nulové rychlosti základního souřadného systému. Přírůstek rychlosti mezi dvěma sousedními souřadnými systémy je dán posledním členem ve vztahu (5-8). Pro odvození časové derivace polohového vektoru $\mathbf{p}_{i-1,i}$ je nutno vzít v úvahu, že rychlost jeho koncového bodu (počátku *i*-tého *LCS*) je dána jednak vlastní změnou vektoru $\mathbf{p}_{i-1}^i$ vlivem pohybu *i*-té pohybové jednotky rychlostí $q_i(t)$ a také vlivem unášivé úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}_{i-1}$, která otáčí ramenem $\mathbf{p}_{i-1}^i$ a je způsobena předchozími rotačními jednotkami (unášivá translační rychlost $\mathbf{v}_{i-1}$ už je v rekurentním vzorci zahrnuta). Výsledná rychlost je pak vektorovým součinem obou složek. Situace je znázorněna na Obr. 5-2.

$$\frac{d\mathbf{p}_{i-1}^i}{dt} = \mathbf{v}_{i-1}^i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_{i-1}^i \tag{5-9}$$

Pak pro rekurentní výpočet translační rychlosti počátku lokálního souřadného systému platí

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1,i} \tag{5-10}$$

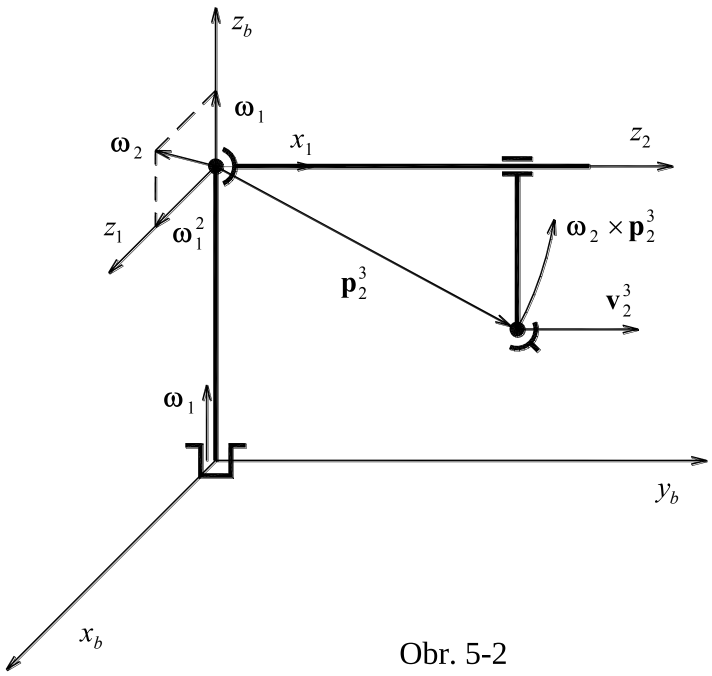
kde $\mathbf{v}_{i-1,i}$ je relativní translační rychlost dvou sousedních souřadných systémů, která je způsobena pohybem *i*-té pohybové jednotky rychlostí $\dot{q}_i(t)$. Relativní translační rychlost se vypočte

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \frac{\partial \mathbf{p}_{i-1,i}}{\partial q_i} . \dot{q}_i \tag{5-11}$$

pro rotační i translační pohybovou jednotku. V prostředí Mathcad je výpočet relativní translační rychlosti dle vztahu (5-11) jednoduchý a univerzální s pomocí příslušných diferenciálních operátorů

$$\mathbf{v}_{i-1,\,i} = submatrix(\mathbf{A}_{b0} \ldots \mathbf{D}_{(R,T)} . \mathbf{A}_{i-1,\,i}, 1, 3, 4, 4) . \dot{q}_i \tag{5-12}$$

Ve vztahu (5-12) příkaz *submatrix* vyjme příslušný vektor $\mathbf{p}_{i-1,i}$ ze čtvrtého sloupce matice $\mathbf{A}_{i-1,i}$, vynásobením diferenciálním operátorem je provedena jeho derivace podle příslušné kloubové proměnné q_i a matice před diferenciálním operátorem přepočtou výsledný vektor relativní rychlosti do základního souřadného systému. Tedy např. pro kinematickou strukturu RTT jsou vztahy pro relativní translační rychlosti počátků lokálních souřadných systémů ve tvaru



Obr. 5-2

$$v_{01}(t) := \text{submatrix}\left(A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t), 1, 3, 4, 4\right) \cdot dq_1(t)$$

$$v_{12}(t) := \text{submatrix}\left(A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t), 1, 3, 4, 4\right) \cdot dq_2(t)$$

$$v_{23}(t) := \text{submatrix}\left(A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot A_{23}(t), 1, 3, 4, 4\right) \cdot dq_3(t)$$

V případě translačních jednotek lze výraz zjednodušit na tvar

$$\mathbf{v}_{i-1}^{i} = \mathbf{k}_{i-1}.\dot{q}_i \qquad (5\text{-}13)$$

pouze pro translační pohybovou jednotku.

5.3 Výpočet úhlového zrychlení ε_i *LCS i*-tého článku mechanismu

Stejně jako úhlová rychlost ω_i, tak i úhlové zrychlení ε_i je stejné jak pro lokální souřadný systém, tak pro libovolný bod *i*-tého článku. Rekurentní vztah pro výpočet ε_i je odvozen analogicky jako pro translační rychlost $\mathbf{v}_i$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{d\omega_{i-1}}{dt} + \frac{d\omega_{i-1}^{i}}{dt} \qquad (5\text{-}14)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + \varepsilon_{i-1}^{i} + \omega_{i-1} \times \omega_{i-1}^{i} \qquad (5\text{-}15)$$

Jak je vidět ze vztahu (5-15), přírůstek úhlového zrychlení mezi dvěma sousedními souřadnými systémy má opět dvě složky - relativní úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^{i}$, které je způsobeno rotačním zrychlením *i*-té pohybové jednotky, a úhlové zrychlení způsobené unášivým pohybem předchozích jednotek. Relativní úhlové zrychlení se vypočte

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i-1,i} = \begin{cases} \mathbf{k}_{i-1}.\ddot{q}_i & \text{R} \\ 0 & \text{T} \end{cases} \tag{5-16}$$

5.4 Výpočet translačního zrychlení $\mathbf{a}_i$ počátku *LCS i*-tého článku mechanismu

Pro odvození rekurentního vztahu pro výpočet translačního zrychlení počátku lokálního souřadného systému vyjdeme ze vztahu pro translační rychlost $\mathbf{v}_i$ a provedeme jeho derivaci podle času

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{i-1}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{i-1}^{i}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i}\right) \tag{5-17}$$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i-1} + \frac{d\mathbf{v}_{i-1}^{i}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i}\right) \tag{5-18}$$

Pro derivaci relativní translační rychlosti platí analogicky

$$\frac{d\mathbf{v}_{i-1}^{i}}{dt} = \mathbf{a}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{v}_{i-1}^{i} \tag{5-19}$$

Derivace posledního členu je derivace součinu a tedy

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i}\right) = \frac{d\boldsymbol{\omega}_{i-1}}{dt} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \frac{d\mathbf{p}_{i-1}^{i}}{dt} \tag{5-20}$$

a s použitím vztahu (5-9) dostaneme výsledný vztah

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i}\right) = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \left[\mathbf{v}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i}\right] \tag{5-21}$$

Výsledný rekurentní vztah pro výpočet translačního zrychlení počátku lokálního souřadného systému je ve tvaru

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i} + 2\left(\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{v}_{i-1}^{i}\right) + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i}\right) \tag{5-22}$$

kde předposlední člen na pravé straně rovnice vyjadřuje Coriolisovo a poslední člen odstředivé zrychlení. Všechny vektory jsou známy z předchozích rekurentních vztahů, popř. transformačních matic a pro relativní translační zrychlení platí

$$\mathbf{a}_{i-1}^{i} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i-1}^{i} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i} \times \left(\boldsymbol{\omega}_{i-1}^{i} \times \mathbf{p}_{i-1}^{i}\right) \qquad \text{R} \tag{5-23}$$

$$\mathbf{a}_{i-1}^{i} = \mathbf{k}_{i-1}.\ddot{q}_i \qquad \text{T} \tag{5-24}$$

5.5 Translační rychlost a zrychlení těžiště *i*-tého článku - $\mathbf{v}_i^*, \mathbf{a}_i^*$

Jelikož translační rychlost a zrychlení každého bodu článku je jiná, je nutno ji pro daný bod vypočítat. Pro výpočet dynamických veličin má zásadní význam rychlost a zrychlení těžiště článku, uvedené vztahy ale platí obecně a je možno je použít pro libovolný bod článku. Jak už bylo uvedeno výše, úhlová rychlost a úhlové zrychlení každého bodu článku je stejná.

$$\mathbf{v}_i^* = \mathbf{v}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* \tag{5-25}$$

kde $\mathbf{p}_i^*$ je poloha těžiště v *i*-tém *LCS*. Pro odvození translačního zrychlení těžiště provedeme derivaci vztahu (5-25) podle času

$$\frac{d\mathbf{v}_i^*}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \frac{d}{dt}\ \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* \tag{5-26}$$

$$\mathbf{a}_i^* = \mathbf{a}_i + \frac{d\boldsymbol{\omega}_i}{dt} \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i \times \frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt} \tag{5-27}$$

Poslední člen vztahu (5-27) obsahuje derivaci polohového vektoru těžiště. Jeho změna analogicky s předchozími úvahami obsahuje vlastní změnu polohového vektoru vůči počátku *LCS* (v našem případě je změna polohy těžiště článku nulová) a změnu polohy koncového bodu způsobenou rotací ramene $\mathbf{p}_i^*$ úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}_i$.

$$\frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{p}_i^*}{dt}\right)_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* \tag{5-28}$$

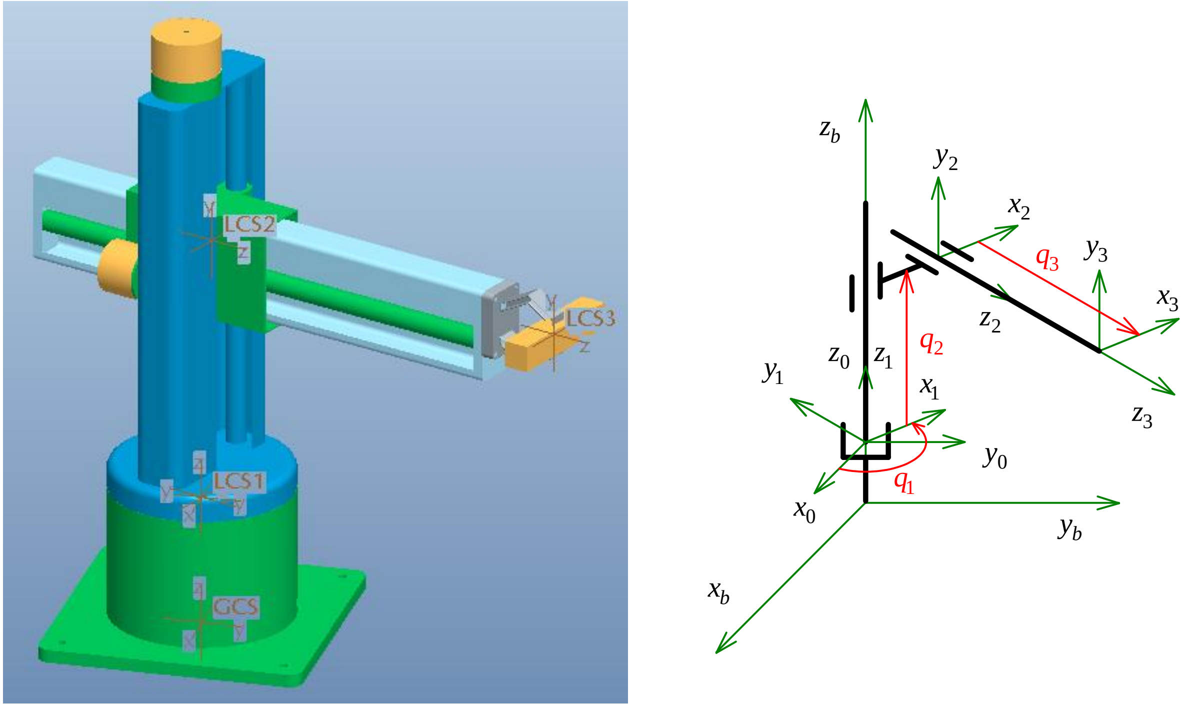
$$\mathbf{a}_i^* = \mathbf{a}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \times \mathbf{p}_i^* + \boldsymbol{\omega}_i \times\ \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{p}_i^* \tag{5-29}$$

Příklad 5-1 Výpočet kinematických veličin na základě Newton-Eulerových vztahů

Stejný manipulátor s kinematickou strukturou RTT dle Obr. 5-3. Řešením inverzní úlohy kinematiky pro zadanou trajektorii koncového bodu v příkladu 3-1 obdržíme časové průběhy kloubových proměnných a jejich derivací podle času průběhy rychlostí a zrychlení pohybových jednotek. Tyto hodnoty jsou vstupními hodnotami pro aplikaci Newton-Eulerových vztahů pro výpočet rychlostí a zrychlení počátků jednotlivých lokálních souřadných systémů a hlavně rychlostí a zrychlení těžišť článků, které jsou nutné pro následnou dynamickou analýzu mechanismu.

Výpočet kinematických veličin článků pro uvedený mechanismus RTT včetně objektu manipulace v prostředí Mathcad je ukázán na následujícím odkaze - ..\Mathcad\rtt_model_objekt.xmcd. Tento příklad bude používán jako referenční i v dalším výkladu.

Výpočet v prostředí Mathcad je na běžném počítači relativně dlouhý, pro urychlení (ovšem bez možnosti měnit výpočet) je doporučeno prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer) na ..\Mathcad\RTT_model_objekt.html.



Obr. 5-3

Komentovaný výpočet kinematických veličin pomocí Newton-Eulerových rekurentních vztahů je ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_NE_kinematika\RTT_NE_kinematika.mp4

Shrnutí kapitoly

V této kapitole bylo ukázáno šest rekurentních vztahů pro výpočet kinematických veličin článků – úhlových rychlostí a uhlových zrychlení článků (tyto veličiny jsou stejné pro kterýkoliv bod na článku), dále translačních rychlostí a translačních zrychlení počátků lokálních souřadných systémů (tyto veličiny se liší pro různé body na článku) a translační rychlosti a translační zrychlení těžišť článků. Výpočet vždy začíná od nultého, nepohyblivého článku a kinematické veličiny jsou postupně dosazovány do jednotlivých rekurentních vztahů.

Otázky

1. Newton-Eulerova metoda, výpočet úhlové a translační rychlosti lokálního souřadného systému.
2. Newton-Eulerova metoda, výpočet úhlového a translačního zrychlení lokálního souřadného systému.
3. Newton-Eulerova metoda, výpočet translační rychlosti a translačního zrychlení těžiště článků.

6 NEWTON – EULEROVA METODA VÝPOČTU REAKCÍ A ZOBECNĚNÝCH SIL

Čas ke studiu: 2 hodiny

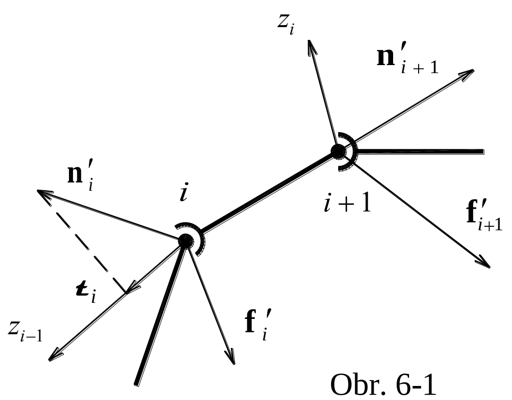
Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

Na základě výsledků výpočtů dle předchozí kapitoly jsou známy úhlové a translační rychlosti těžišť jednotlivých článků. V této kapitole je ukázán výpočet sil zatěžujících jednotlivé kinematické dvojice – akční, resp. reakční síly a momenty. Průmětem reakční síly do osy pohybu v případě translačního článku je dále vypočtena tzv. zobecněná síla – tj. síla, kterou v daném místě musí vyvinout pohonný mechanismus. Analogicky průmětem reakčního momentu do osy otáčení rotačního článku je získána zobecněná síla (moment), který musí pohonný mechanismus vyvinout na tomto místě. Představeny jsou tedy další dva rekurentní vztahy

- výpočet akčních sil, kterými daný článek působí na článek předchozí, začíná se od posledního článku, který může být zatížen technologickými silami,
- výpočet akčních momentů, kterými daný článek působí na článek předchozí, začíná se od posledního článku, který může být zatížen technologickými silami,
- průmětem reakčních sil, popř. momentů do osy pohybu se vypočtou zobecněné síly – síly, které musí vyvinout pohon, aby se koncový bod pohyboval se zadaným průběhem polohy, rychlosti a zrychlení.

Výklad

Newton-Eulerova metoda modelování dynamiky soustav hmotných těles je relativně jednoduchá metoda, která poskytuje úplný obraz o kinematických a dynamických veličinách jednotlivých článků



Obr. 6-1

mechanismu. Zobecněná síla je zjednodušeně průmět reakční síly do směru pohybu nebo momentu do osy otáčení a v případě mechanismů je to zjednodušeně ta složka reakce v pohybové jednotce, kterou musí vyvinout její pohon, aby se daný článek mechanismu pohyboval po zadané trajektorii, s předepsanou rychlostí a zrychlením. Ostatní složky reakce v pohybové jednotce jsou zachyceny vlastní pohybovou jednotkou, tj. vedením, ložisky apod. Výpočet průběhu reakce v pohybových jednotkách mechanismu má tedy zásadní význam jak na dimenzování pohonů, tak na dimenzování pohybových jednotek a vlastních článků mechanismu. Zobecněná síla je definována jako podíl elementární práce sil působících na článek ve směru možného pohybu a změny zobecněné souřadnice

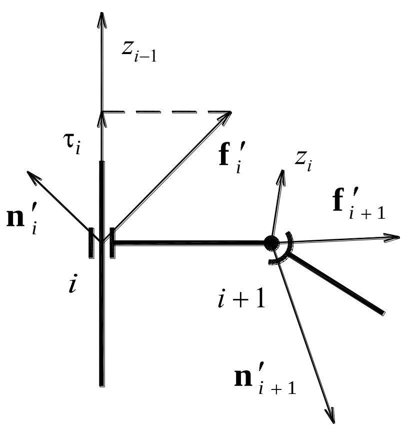
$$\tau_i = \frac{dA}{dq_i} \tag{6-1}$$

Pro běžné mechanismy připadají v úvahu dva případy – rotační a translační pohybová jednotka. Na Obr. 6-1 je uveden příklad i-té rotační pohybové jednotky. $\mathbf{f}_i'$ je výslednice reakčních sil působících na pohybovou jednotku, $\mathbf{n}_i'$ je výslednice reakčních momentů působících na pohybovou jednotku, osa z_{i-1} je osou rotace i-té pohybové jednotky. Práce ve směru možného pohybu je dána

$$dA = \mathbf{n}_i' . \mathbf{k}_{i-1} . dq_i \tag{6-2}$$

Pro zobecněnou sílu pak platí

$$\tau_i = \frac{dA}{dq_i} = \mathbf{n}_i' . \mathbf{k}_{i-1} \tag{6-3}$$



Obr. 6-2

Zobecněná síla v tomto případě je dána skalárním součinem momentu reakce a vektoru v ose otáčení a z matematického hlediska je to tedy skalární veličina. Je to vlastně průmět momentu reakce do směru otáčení, výslednice translační reakce $\mathbf{f}_i'$ nepřispívá ke zobecněné síle a je celá zachycena ložiskem. Na Obr. 6-2 je uveden příklad translační jednotky. Práce ve směru možného pohybu je dána

$$dA = \mathbf{f}_i' . \mathbf{k}_{i-1} . dq_i \tag{6-4}$$

a pro zobecněnou sílu platí

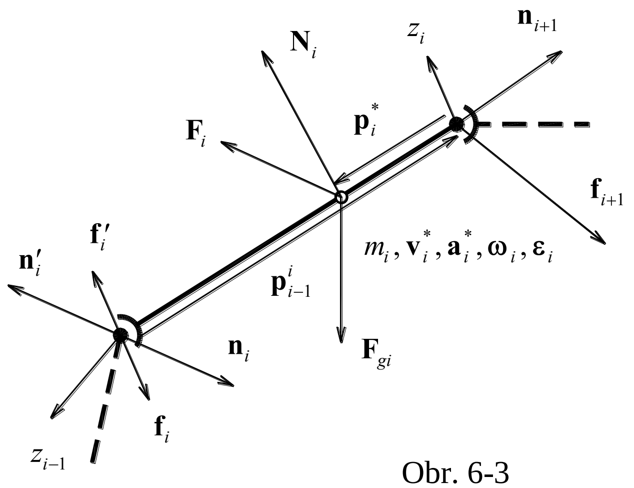
$$\tau_i = \frac{dA}{dq_i} = \mathbf{f}_i' . \mathbf{k}_{i-1} \tag{6-5}$$

Obdobně jako v případě rotační jednotky je zobecněná síla dána průmětem výslednice translační reakce $\mathbf{f}_i'$ do směru pohybu dané pohybové jednotky a výslednice reakčních momentů $\mathbf{n}_i'$ je zachycena vedením translační pohybové jednotky a nepřispívá ke zobecněné síle.

6.1 Rovnováha sil působících na *i*-tý článek

Pro získání rekurentních vztahů pro výpočet akčních sil, resp. reakcí v pohybových jednotkách je uvolněn *i*-tý článek mechanismu, pro rovnováhu sil, působících na článek dle Obr. 6-3 pak platí

$$\mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{f}_i' + \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{gi} = 0 \tag{6-6}$$



Obr. 6-3

kde $\mathbf{f}_{i+1}$ je síla, kterou působí *i*+1 článek na *i*-tý článek (akční síla), $\mathbf{f}_i'$ je síla, kterou působí předchozí *i*-1 článek na *i*-tý článek (reakce předchozího článku), $\mathbf{F}_i$ je setrvačná síla způsobená translačním zrychlením těžiště článku o hmotnosti m_i, působící proti směru zrychlení těžiště

$$\mathbf{F}_i = -m_i.\mathbf{a}_i^* \tag{6-7}$$

a $\mathbf{F}_{gi}$ je tíhová síla způsobená gravitací

$$\mathbf{F}_{gi} = m_i.\mathbf{G} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \qquad g = 9.80665\, ms^{-2} \tag{6-8}$$

Jelikož se jedná o získání rekurentního tvaru, zavedeme rovnost $\mathbf{f}_i' = -\mathbf{f}_i$, kterou nahradíme reakční sílu od předchozího článku akční silou, kterou působí *i*-tý článek na *i*-1 článek, výsledkem výrazu (6-9) je tedy akční síla, která vystupuje v dalších rekurentních vztazích pro předchozí články, nikoliv reakce působící na *i*-tý článek.

$$\mathbf{f}_i = m_i \ \mathbf{G} - \mathbf{a}_i^* \ + \mathbf{f}_{i+1} \qquad i = n, n-1, ..., 1 \tag{6-9}$$

Pomocí výše uvedeného vztahu lze jednoduše vypočítat akční síly, počínaje posledním článkem, kde za $\mathbf{f}_{i+1}$ dosadíme buď nulovou hodnotu, nebo tíhovou sílu způsobenou manipulovaným břemenem, nebo akční sílu způsobenou nástrojem (tryska apod.).

6.2 Rovnováha momentů k těžišti *i*-tého článku

Obdobně jako pro rovnováhu sil platí pro rovnováhu momentů k těžišti i-tého článku rovnovážná rovnice

$$\mathbf{n}_i' + \mathbf{N}_i + \mathbf{n}_{i+1} + \ \mathbf{p}_{i-1}^{i} + \mathbf{p}_i^{*} \ \times \mathbf{f}_i - \mathbf{p}_i^{*} \times \mathbf{f}_{i+1} = 0 \tag{6-10}$$

kde $\mathbf{n}_{i+1}$ a $\mathbf{n}_i'$ jsou momenty, kterými působí následující a předchozí článek na i-tý článek, $\mathbf{N}_i$ je moment tečných a odstředivých sil vzhledem k těžišti

$$\mathbf{N}_i = -\left[\mathbf{J}_i.\varepsilon_i + \omega_i \times \ \mathbf{J}_i.\omega_i \ \right] \tag{6-11}$$

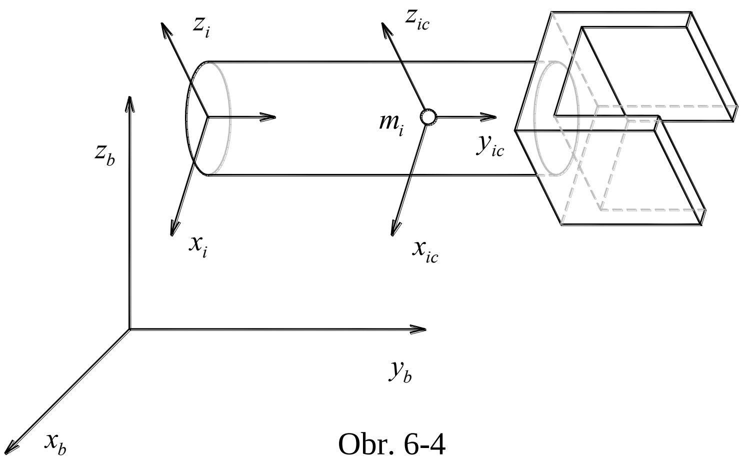
kde první člen na pravé straně vztahu (6-11) představuje moment tečných sil a druhý moment odstředivých sil. Při použití stejné konvence pro akci a reakci dvou těles zavedeme $\mathbf{n}_i' = -\mathbf{n}_i$ a dostaneme výsledný rekurentní vztah pro výpočet akčních momentů, kterými i-tý článek působí na i-1 článek ve všech pohybových jednotkách počínaje poslední

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_{i+1} + \mathbf{N}_i + \ \mathbf{p}_{i-1}^{i} + \mathbf{p}_i^{*} \ \times \mathbf{f}_i - \mathbf{p}_i^{*} \times \mathbf{f}_{i+1} \qquad i = n, n-1, \ldots, 1 \tag{6-12}$$

Na základě výše uvedených výpočtů lze vypočítat časové průběhy momentů a sil akcí (reakcí) v každé pohybové jednotce a na jejich základě zjistit průběh zatížení podél jednotlivých článků a provést případnou analýzu napětí. Průměty reakčních momentů pro rotační pohybovou jednotku a reakčních sil pro translační jednotku do směru pohybu (pro rotační do osy otáčení) tvoří zobecněné síly

$$\tau_i = \mathbf{f}_i'.\mathbf{k}_{i-1} \qquad \mathrm{T} \qquad\qquad \tau_i = \mathbf{n}_i'.\mathbf{k}_{i-1} \qquad \mathrm{R} \tag{6-13}$$

které zatěžují pohon a na základě jejich průběhu jsou pohon a jeho komponenty dimenzovány (tj. převodovka, motor, napájecí měnič, napájecí sít).



Obr. 6-4

6.3 Matice setrvačnosti článků

Matice setrvačnosti jednotlivých článků mechanismu představují spojení mezi reálným světem mechanismu a jeho matematickým modelem. Základním technickým problémem je výpočet, popř. zjištění matice setrvačnosti článku ve fázi prvního návrhu a dále její upřesňování na základě postupného zpřesňování a doplňování konstrukce článku a jeho pohonů.

Výpočet matice setrvačnosti lze provést jen pro velmi omezený počet primitivních tvarů, pro skutečné články je nutno většinou už ve fázi prvního návrhu použít některý z CAD systémů. Důležité je správné stanovení souřadného systému, ke kterému vztahujeme matici setrvačnosti a dále správný přepočet do toho souřadného systému, v jehož souřadnicích matici setrvačnosti vyjadřujeme. Ve výše uvedených výpočtech jsou všechny vektory i matice setrvačnosti vyjádřeny v souřadnicích základního souřadného systému, přitom matice setrvačnosti jednotlivých článků musí být vypočteny vzhledem k souřadnému systému, který leží v těžišti článku (rovnováha momentů k těžišti článku). Příklad je uveden na Obr. 6-4. Většina CAD systémů umí určit polohu těžiště a matici setrvačnosti daného článku vzhledem k libovolnému souřadnému systému. Vhodné je umístit do článku lokální souřadný systém LCS_i (x_i, y_i, z_i) pro eventuální výpočet v souřadnicích lokálních souřadných systémů a do těžiště článku umístit stejně orientovaný souřadný systém, který nazveme centrální souřadný systém i-tého článku CCS_i (x_{ic}, y_{ic}, z_{ic}). Matice setrvačnosti článku vzhledem k centrálnímu souřadnému systému a vyjádřená v souřadnicích centrálního souřadného systému je definována

$$\mathbf{J}_{icc} = \begin{bmatrix} J_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & J_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & J_z \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}14)$$

kde na hlavní diagonále jsou momenty k osám centrálního souřadného systému, ostatní prvky jsou deviační momenty. Tyto prvky jsou získány pomocí vhodného CAD systému. Pro výpočet je nutné vyjádřit tuto matici v souřadnicích základního souřadného systému

$$\mathbf{J}_{ic} = \mathbf{R}_b^i . \mathbf{J}_{icc} . \mathbf{R}_b^{iT} \qquad (6\text{-}15)$$

V přepočtu se jedná jen o změnu orientace os základního souřadného systému vůči centrálnímu souřadnému systému článku a tedy vyjádření prvků matice v souřadnicích jiného souřadného systému. Jelikož je centrální souřadný systém orientován stejně jako lokální souřadný systém článku, je možno pro přepočet orientace matice setrvačnosti použít příslušnou submatici rotace $\mathbf{R}_b^i$. Tento přepočet bývá často nesprávně zaměňován s výpočtem matice setrvačnosti článků vůči jinému souřadnému systému, který musí být proveden pomocí Steinerovy věty v maticovém tvaru. Pokud například máme k dispozici matici setrvačnosti vyjádřenou vzhledem k lokálnímu souřadnému systému, musí se přepočítat (ne vyjádřit) vzhledem k centrálnímu souřadnému systému a pak vyjádřit v souřadnicích základního souřadného systému.

$$\mathbf{J}_{ic} = \mathbf{R}_b^i . \ \mathbf{J}_{ii} - \mathbf{J}_{ici} \ . \mathbf{R}_b^{iT} \qquad (6\text{-}16)$$

kde matice $\mathbf{J}_{ici}$ vyjadřuje posun souřadných systémů a podle Steinerovy věty je

$$\mathbf{J}_{ici} = \begin{bmatrix} m_i . \ y_{ti}^2 + z_{ti}^2 & -m_i x_{ti} y_{ti} & -m_i x_{ti} z_{ti} \\ -m_i x_{ti} y_{ti} & m_i . \ x_{ti}^2 + z_{ti}^2 & -m_i y_{ti} z_{ti} \\ -m_i x_{ti} z_{ti} & -m_i y_{ti} z_{ti} & m_i . \ x_{ti}^2 + y_{ti}^2 \end{bmatrix} \qquad (6\text{-}17)$$

kde x_{ti}, y_{ti}, z_{ti} jsou souřadnice těžiště *i*-tého článku v souřadnicích jeho lokálního souřadného systému.

Příklad 6-1 Výpočet sil působících v kloubech (vazbách) podle Newton-Eulera

Výpočet akčních (reakčních) sil, kterými na sebe působí články v kinematických vazbách a výpočet zobecněných sil dle Newton-Eulerových vztahů pro referenční mechanismus RTT včetně objektu manipulace v prostředí Mathcad je ukázán na odkazu - ..\Mathcad\rtt_model_objekt.xmcd.

Výpočet v prostředí Mathcad je na běžném počítači relativně dlouhý, pro urychlení (ovšem bez možnosti měnit výpočet) je doporučeno prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer) na
..\Mathcad\RTT_model_objekt.html

Komentovaný výpočet akčních sil a momentů a zobecněných sil je také ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_NE_dynamika\RTT_NE_dynamika.mp4

Shrnutí kapitoly

V této kapitole byly ukázány dva rekurentní vztahy pro výpočet akčních sil, kterými *i*-tý článek působí na *i*-1 článek. Dále byl představen pojem zobecněná síla, což je zjednodušeně síla, kterou musí v dané pohybové vazbě vyvinout pohon, aby se článek pohyboval v souladu s požadovanými kinematickými parametry – polohou, rychlostí a zrychlením. Výpočet vždy začíná od posledního článku a akční síly jsou postupně dosazovány do jednotlivých rekurentních vztahů.

Otázky

1. Newton - Eulerova metoda výpočtu reakcí a zobecněných sil, rovnováha sil působících na článek.
2. Newton - Eulerova metoda výpočtu reakcí a zobecněných sil, rovnováha momentů působících na článek.

7 LAGRANGEOVY POHYBOVÉ ROVNICE II. DRUHU

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

V kapitole je ukázán výpočet zobecněných sil na základě Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu. V příkladech jsou ukázány dva základní způsoby použití Lagrangeovy pohybové rovnice

- maticové řešení – výhodou je menší pracnost a větší univerzálnost výpočtu zobecněných sil – tedy sil, které musí ve vazbě vyvinout pohonný systém. Nevýhodou je delší doba výpočtu, která znemožňuje použití této metody v řízení mechanismu,
- ruční odvození Lagrangeových pohybových rovnic. Metoda je pracná a zdlouhavá, ale vede k jednoduchému a rychlému výpočtu zobecněných sil z pohybových rovnic. Tato metoda je vhodná pro řízení mechanismů.

Výklad

Lagrangeovy pohybové rovnice slouží k výpočtu průběhu zobecněných sil jednotlivých pohybových jednotek. Na rozdíl od Newton - Eulerovy metody, která konstruktérovi dává dobrý přehled o kinematických veličinách jednotlivých článků (poloha a rychlost těžišť) a úplný obraz zatěžování jednotlivých článků a pohybových dvojic (kromě zobecněné síly úplnou reakci v pohybové jednotce a průběh zatěžování podél článku), poskytují Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu v maticovém tvaru možnost explicitního vyjádření parametrů mechanického subsystému pro účely řízení.

Při aplikaci Lagrangeovy pohybové rovnice je možno provést řešení, které je vázáno na danou kinematickou strukturu, nebo universální řešení pro libovolnou kinematickou strukturu. Řešení vázané na kinematickou strukturu je kratší a jednodušší zejména pro struktury s malým počtem stupňů volnosti, řešení universální je výhodné pro možnost generování parametrů dynamického modelu pro libovolnou kinematickou strukturu, což je důležité ve fázi návrhu koncepce robotu a ve fázi návrhu jeho řídicího systému a pohonů. Při odvození vyjdeme z Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu pro *j*-tý článek (při zanedbání disipativních sil) ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial K}{\partial q_j}+\frac{\partial P}{\partial q_j}=\tau_j \tag{7-1}$$

Kde *K* je kinetická energie soustavy, *P* potenciální energie soustavy. Index $j = 1..n$ příslušející zobecněné síle τ_j v *j*-tém kloubu a kloubové proměnné q_j je při výpočtu v daném cyklu neměnný.

7.1.1 Kinetická energie článků

Odvození kinetické a potenciální energie soustavy článků pro aplikaci v Lagrangeově pohybové rovnici (7-1) je provedeno důsledně v maticovém tvaru na základě (Frolov, 1988). Nechť *dm* je hmotný element *i*-tého článku, jehož souřadnice v lokálním, tj. *i*-tém souřadném systému jsou dány vektorem $\mathbf{p}_{i\;i}$. Jelikož *i*-tý souřadný systém je spojen s *i*-tým článkem a pohybuje se s ním, jsou souřadnice polohy hmotného bodu *dm* v tomto souřadném systému konstantní. Souřadnice hmotného bodu *dm* je možno vyjádřit vůči základnímu souřadnému systému pomocí transformační matice

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{T}_{bi} \cdot (\mathbf{p}_i)_i \tag{7-2}$$

Rychlost hmotného elementu *dm* i-tého článku vypočteme jako časovou změnu jeho polohy

$$\mathbf{v}_i = \frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{T}_{bi} \cdot (\mathbf{p}_i)_i\right) = \frac{d\mathbf{T}_{bi}}{dt} \cdot (\mathbf{p}_i)_i = \dot{\mathbf{T}}_{bi} \cdot (\mathbf{p}_i)_i \tag{7-3}$$

neboť $\dfrac{d\,(\mathbf{p}_i)_i}{dt} = 0$ (7-4)

Transformační matice mezi základním souř. systémem a i-tým souřadným systémem je složenou funkcí více proměnných a jako takovou ji musíme i derivovat

$$\mathbf{T}_{bi} = \mathbf{T}_{bi}\left(q_1(t), q_2(t), \ldots, q_i(t)\right) \tag{7-5}$$

$$\frac{d\mathbf{T}_{bi}}{dt} = \dot{\mathbf{T}}_{bi} = \sum_{j=1}^{i} \frac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{U}_{ij} \cdot \frac{dq_j}{dt} = \sum_{j=1}^{i} \mathbf{U}_{ij} \cdot \dot{q}_j \tag{7-6}$$

parciální derivace transformační matice podle jednotlivých kloubových proměnných vypočteme snadno pomocí matice diferenciálního operátoru

$$\frac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j} = \mathbf{U}_{ij} = \mathbf{A}_{b0} \cdot \mathbf{A}_{01}(q_1) \cdot \mathbf{A}_{12}(q_2) \ldots \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}_{j-1,j}(q_j) \ldots \mathbf{A}_{i-1,i}(q_i) \tag{7-7}$$

Kinetickou energii hmotného elementu dm v maticovém vyjádření pak je možno napsat jako

$$dK_i = \frac{1}{2} tr\left(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i^T\right) . dm = \frac{1}{2} tr\left(\dot{\mathbf{T}}_{bi} \cdot (\mathbf{p}_i)_i \cdot (\mathbf{p}_i)_i^T \cdot \dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right) . dm \tag{7-8}$$

stopa matice

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \left(x_i \quad y_i \quad z_i \quad 1 \right)$$

Kinetickou energii celého článku vypočteme jako součet (integrál) kinetických energií jednotlivých hmotných elementů *dm*

$$K_i = \frac{1}{2} tr\left[\int_{m_i} \dot{\mathbf{T}}_{bi} \cdot (\mathbf{p}_i)_i \cdot (\mathbf{p}_i)_i^T \cdot \dot{\mathbf{T}}_{bi}^T \, . dm\right] \tag{7-9}$$

kde m_i je hmotnost článku i. Derivace transformační matice $\dot{\mathbf{T}}_{bi}$ nezávisí na integrálu polohových momentů hmotných elementů a je možno ji vytknout mimo integrál

$$K_i = \frac{1}{2} tr\left[\dot{\mathbf{T}}_{bi} \cdot \left(\int_{m_i} (\mathbf{p}_i)_i \cdot (\mathbf{p}_i)_i^T . dm\right) \cdot \dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] \tag{7-10}$$

a po úpravě

$$K_i = \frac{1}{2} tr\left[\dot{\mathbf{T}}_{bi} . \mathbf{H}_i . \dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] \tag{7-11}$$

$\mathbf{H}_i$ je homogenní matice setrvačnosti i-tého článku vyjádřená v jeho lokálním, tj. i-tém souřadném systému

$$\mathbf{H}_i = \int_{m_i} \mathbf{p}_i \, {}_i . \, \mathbf{p}_i{}^T_i .dm = \int_{m_i} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \\ 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} .dm = \int_{m_i} \begin{bmatrix} x_i^2 & x_i y_i & x_i z_i & x_i \\ y_i x_i & y_i^2 & y_i z_i & y_i \\ z_i x_i & z_i y_i & z_i^2 & z_i \\ x_i & y_i & z_i & 1 \end{bmatrix} .dm \tag{7-12}$$

Označme jednotlivé momenty setrvačnosti jak je obvyklé (s cyklickou záměnou indexů)

$$I_{yz} = \int_{m_i} x_i^2 .dm \quad I_{xz} = \int_{m_i} y_i^2 .dm \quad I_{xy} = \int_{m_i} z_i^2 .dm \tag{7-13}$$

$$D_{xy} = \int_{m_i} x_i y_i dm \quad D_{xz} = \int_{m_i} x_i z_i dm \quad D_{yz} = \int_{m_i} y_i z_i dm \tag{7-14}$$

$$x_i^* .m_i = \int_{m_i} x_i dm \quad y_i^* .m_i = \int_{m_i} y_i dm \quad z_i^* .m_i = \int_{m_i} z_i dm \tag{7-15}$$

$$m_i = \int_{m_i} dm \tag{7-16}$$

Alternativně jsou používány pro momenty k rovinám a deviační momenty i jiné symboly

$$I_{xx} = \int_{m_i} x_i^2 .dm \tag{7-17}$$

$$I_{xy} = \int_{m_i} x_i y_i dm \tag{7-18}$$

Pak pro homogenní matici setrvačnosti platí (alternativně)

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} I_{yz} & D_{xy} & D_{xz} & x_i^* .m_i \\ D_{xy} & I_{xz} & D_{yz} & y_i^* .m_i \\ D_{xz} & D_{yz} & I_{xy} & z_i^* .m_i \\ x_i^* .m_i & y_i^* .m_i & z_i^* .m_i & m_i \end{bmatrix} \quad \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} & x_i^* .m_i \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{zy} & y_i^* .m_i \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} & z_i^* .m_i \\ x_i^* .m_i & y_i^* .m_i & z_i^* .m_i & m_i \end{bmatrix} \tag{7-19}$$

kde x_i^*, y_i^*, z_i^* jsou souřadnice těžiště i-tého článku vyjádřené v lokálním i-tém souřadném systému. Jednotlivé momenty setrvačnosti jsou sice výhodně vyjádřené v lokálním souřadném systému, ale tento souřadný systém, pokud dodržíme Denavit-Hartenbergův princip rozmístění souřadných systémů, není systém centrální. Pokud tedy máme k dispozici momenty setrvačnosti k osám centrálního souřadného systému, musíme je přepočítat do lokálního souřadného systému použitím homogenní transformační matice

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{T}_{i,ic} .\mathbf{H}_{ic} .\mathbf{T}_{i,ic}^T \tag{7-20}$$

kde $\mathbf{T}_{i,ic}$ je homogenní transformační matice mezi i-tým lokálním a i-tým centrálním souřadným systémem. Kinetická energie všech článků

$$K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr\left[\dot{\mathbf{T}}_{bi}.\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] \tag{7-21}$$

Na hlavní diagonále homogenní matice setrvačnosti vystupují tedy momenty setrvačnosti k rovinám I_{yz}, I_{xz}, I_{xy} (alternativně značené I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}). Tyto momenty získáme přepočtem při známých momentech stervačnosti daného článku k osám lokálního souřadného systému daného článku.

$$I_{xx} = \frac{I_y + I_z - I_x}{2} \qquad I_{yy} = \frac{I_z + I_x - I_y}{2} \qquad I_{zz} = \frac{I_x + I_y - I_z}{2} \tag{7-22}$$

7.1.2 Potenciální energie článků

Potenciální energie i-tého článku o hmotnosti m_i soustředěné v těžišti v homogenním gravitačním poli s gravitačním zrychlením g v kartézských souřadnicích je

$$P_i = -m_i.g.z_b^* \tag{7-23}$$

kde z_b^* je souřadnice těžiště v základním souřadném systému. V homogenních souřadnicích je možno potenciální energii vyjádřit

$$P_i = -m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{T}_{bi}.\ \mathbf{p}_i^*\ {}_i \tag{7-24}$$

kde

$$\mathbf{G}^T = \ 0 \quad 0 \quad -g \quad 0 \tag{7-25}$$

je matice gravitačního zrychlení

$$\mathbf{p}_i^*\ {}_i = \left[x_i^* \quad y_i^* \quad z_i^* \quad 1\right]^T \tag{7-26}$$

jsou souřadnice těžiště m_i vyjádřené v lokálním souřadném systému. Celková potenciální energie všech článků

$$P = -\sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{T}_{bi}.\ \mathbf{p}_i^*\ {}_i \tag{7-27}$$

7.2 Lagrangeova pohybová rovnice II. druhu v maticovém vyjádření

Výrazy pro kinetickou energii (7-21) a potenciální energii (7-27) článků dosadíme do obecného vyjádření Lagrangeovy rovnice (7-1) a upravíme. Nejprve provedeme odvození druhého členu na levé straně rovnice (7-1)

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial q_j}.\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} tr\left[\dot{\mathbf{T}}_{bi}.\mathbf{H}_i.\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}^T}{\partial q_j}\right] = \sum_{i=1}^{n} tr\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial q_j}.\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] \tag{7-28}$$

protože

$$\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial q_j}.\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right]^T = \dot{\mathbf{T}}_{bi}^{T\ T}.\mathbf{H}_i^T.\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}^T}{\partial q_j} = \left[\dot{\mathbf{T}}_{bi}.\mathbf{H}_i.\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}^T}{\partial q_j}\right] \tag{7-29}$$

protože pokud platí, že $\mathbf{M}_1^{\ T} = \mathbf{M}_2$ pak hlavní diagonála těchto matic je stejná a platí $tr\mathbf{M}_1 = tr\mathbf{M}_2$ a navíc platí $\mathbf{H}_i^T = \mathbf{H}_i$

$$\dot{\mathbf{T}}_{bi} = \sum_{k=1}^{i} \mathbf{U}_{ik}.\frac{dq_k}{dt} = \mathbf{U}_{i1}.\frac{dq_1}{dt} + \mathbf{U}_{i2}.\frac{dq_2}{dt} + \dots + \mathbf{U}_{ii}.\frac{dq_i}{dt} = \sum_{k=1}^{i} \mathbf{U}_{ik}.\dot{q}_k \tag{7-30}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial q_j} = \frac{\partial \mathbf{U}_{i1}}{\partial q_j}.\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{U}_{i2}}{\partial q_j}.\dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \mathbf{U}_{ii}}{\partial q_j}.\dot{q}_i = \mathbf{U}_{i1j}.\dot{q}_1 + \mathbf{U}_{i2j}.\dot{q}_2 + \dots + \mathbf{U}_{iij}.\dot{q}_i = \sum_{l=1}^{i} \mathbf{U}_{ilj}.\dot{q}_l \tag{7-31}$$

Pro $j > i$ $\mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}, \dots$ neobsahuje q_j, proto $\frac{\partial \mathbf{U}_{i1}}{\partial q_j} = 0$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial q_j} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{i} \mathbf{U}_{ilj}.\dot{q}_l & \text{pro } j \le i \\ 0 & \text{pro } j > i \end{cases} \tag{7-32}$$

Pak tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^{n} tr\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial q_j}.\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] = \sum_{i=j}^{n} tr\left[\left(\sum_{l=1}^{i} \mathbf{U}_{ilj}.\dot{q}_l\right).\mathbf{H}_i.\left(\sum_{k=1}^{i} \mathbf{U}_{ik}^T.\dot{q}_k\right)\right] = \\ &= \sum_{i=j}^{n}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ilj}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k \end{aligned} \tag{7-33}$$

Odvození $\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}$ je provedeno analogicky jako $\frac{\partial K}{\partial q_j}$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n} tr\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}.\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] \tag{7-34}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{bi} = \mathbf{U}_{i1}.\dot{q}_1 + \mathbf{U}_{i2}.\dot{q}_2 + \dots + \mathbf{U}_{ij}.\dot{q}_j + \dots + \mathbf{U}_{ii}.\dot{q}_i = \sum_{k=1}^{i} \mathbf{U}_{ik}.\dot{q}_k \tag{7-35}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\mathbf{U}_{i1}.\dot{q}_1\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\mathbf{U}_{ij}.\dot{q}_j\right) + \dots + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\mathbf{U}_{ii}.\dot{q}_i\right) = \\ &= \frac{\partial \mathbf{U}_{i1}}{\partial \dot{q}_j}.\dot{q}_1 + \mathbf{U}_{i1}.\frac{\partial \dot{q}_1}{\partial \dot{q}_j} + \dots + \frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial \dot{q}_j}.\dot{q}_j + \mathbf{U}_{ij}.\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_j} + \dots + \frac{\partial \mathbf{U}_{ii}}{\partial \dot{q}_j}.\dot{q}_i + \mathbf{U}_{ii}.\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{q}_j} \end{aligned} \tag{7-36}$$

Všechny parciální derivace kromě $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_j}$ jsou nulové, protože členy $\mathbf{U}_{ij}$ neobsahují $\dot{q}_j$. Pak

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}=\begin{cases}\mathbf{U}_{ij} & \text{pro } j\le i\\ 0 & \text{pro } j>i\end{cases} \tag{7-37}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}\right)=\sum_{i=j}^{n} tr\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}\right).\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right]+\sum_{i=j}^{n} tr\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}.\mathbf{H}_i.\ddot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right] \tag{7-38}$$

Nejprve odvodíme první člen na pravé straně rovnice (7-38). Derivaci podle času provedeme jako derivaci složené funkce více proměnných $\mathbf{U}_{ij}\ q_1\ t\ ,q_2\ t\ ,...,q_i\ t$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}\right)=\frac{d\mathbf{U}_{ij}}{dt}=\frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_1}.\dot{q}_1+\frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_2}.\dot{q}_2+...+\frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_i}.\dot{q}_i=\sum_{l=1}^{i}\mathbf{U}_{ijl}.\dot{q}_l \tag{7-39}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}\right)=\begin{cases}\sum_{l=1}^{i}\mathbf{U}_{ijl}.\dot{q}_l & j\le i\\ 0 & j>i\end{cases} \tag{7-40}$$

Pak

$$\sum_{i=j}^{n} tr\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}\right).\mathbf{H}_i.\dot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right]=\sum_{i=j}^{n} tr\left[\sum_{l=1}^{i}\mathbf{U}_{ijl}.\dot{q}_l.\mathbf{H}_i.\sum_{k=1}^{i}\mathbf{U}_{ik}^T.\dot{q}_k\right]=\sum_{i=j}^{n}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ijl}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\dot{q}_k.\dot{q}_l \tag{7-41}$$

Pro druhý člen pravé strany rovnice (7-38) platí

$$\ddot{\mathbf{T}}_{bi}=\frac{d\dot{\mathbf{T}}_{bi}}{dt}=\sum_{k=1}^{i}\frac{d\mathbf{U}_{ik}}{dt}.\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{i}\mathbf{U}_{ik}.\ddot{q}_k=\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}\mathbf{U}_{ikl}.\dot{q}_l.\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{i}\mathbf{U}_{ik}.\ddot{q}_k \tag{7-42}$$

$$\ddot{\mathbf{T}}_{bi}^T=\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}\mathbf{U}_{ikl}^T.\dot{q}_l.\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{i}\mathbf{U}_{ik}^T.\ddot{q}_k \tag{7-43}$$

Pak

$$\begin{aligned}\sum_{i=j}^{n} tr\left[\frac{\partial \dot{\mathbf{T}}_{bi}}{\partial \dot{q}_j}.\mathbf{H}_i.\ddot{\mathbf{T}}_{bi}^T\right]&=\sum_{i=j}^{n} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\left(\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i}\mathbf{U}_{ikl}^T.\dot{q}_l.\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{i}\mathbf{U}_{ik}^T.\ddot{q}_k\right)\right]=\\&=\sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k+\sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\ddot{q}_k\end{aligned} \tag{7-44}$$

Pro poslední člen levé strany obecného vyjádření Lagrangeovy rovnice (7-1) platí

$$\frac{\partial P}{\partial q_j}=-\sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\frac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j}.\ \mathbf{p}_i^*\ {}_i=-\sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\ \mathbf{p}_i^*\ {}_i \tag{7-45}$$

Nyní dosadíme do rovnice (7-1) výrazy (7-33),(7-41),(7-44) a (7-45), přitom výrazy (7-33) a (7-41) jsou si rovny a tedy se odečtou

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ijl}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\dot{q}_k.\dot{q}_l=\sum_{i=j}^{n}\sum_{l=1}^{i}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ilj}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k \tag{7-46}$$

protože

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{ij}}{\partial q_1} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_j \partial q_1} \qquad \frac{\partial \mathbf{U}_{i1}}{\partial q_j} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_1}}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{T}_{bi}}{\partial q_1 \partial q_j} \tag{7-47}$$

Obecně nelze zaměnit pořadí parciálních derivací, ale pokud jsou smíšené parciální derivace v daném bodě spojité – v případě transformační matice to vyplývá z fyzikální podstaty jejích prvků – jsou si v tomto bodě rovny a lze zaměnit jejich pořadí. Úpravou tedy dostaneme Lagrangeovu rovnici II. druhu pro výpočet zobecněné síly v dané pohybové jednotce v použitelném tvaru

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\ddot{q}_k + \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k - \sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\ \mathbf{p}_i^{*}{}_{i} = \tau_j \tag{7-48}$$

Příklad 7-1 Výpočet zobecněných sil pomocí Lagrangeovy pohybové rovnice v maticovém tvaru

Výpočet zobecněných sil použitím Lagrangeovy pohybové rovnice v maticovém tvaru pro referenční mechanismus RTT včetně objektu manipulace v prostředí Mathcad je ukázán na odkazu - ..\Mathcad\RTT_Lagr_maticove.xmcd

Výpočet v prostředí Mathcad pro prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer), bez možnosti měnit výpočet, na ..\Mathcad\RTT_Lagr_maticove.html

Komentovaný výpočet zobecněných sil Lagrangeovy pohybové rovnice v maticovém tvaru je také ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_Lagr_maticove\RTT_Lagr_maticove.mp4

Příklad 7-2 Ruční odvození Lagrangeových pohybových rovnic a výpočet zobecněné síly

Výpočet zobecněných sil použitím Lagrangeovy pohybové rovnice, která je odvozena ručně na základě derivace kinetické a potenciální energie dle vztahu (7-1). Nejprve je vypočtena kinetická a potenciální energie článků, pak jsou ručně provedeny potřebné derivace a Lagrangeovy pohybové rovnice jsou upraveny do podoby, snadno využitelné v algoritmu momentového řízení robotů. Výpočet je proveden opět pro referenční mechanismus RTT včetně objektu manipulace v prostředí Mathcad - ..\Mathcad\RTT_model_objekt.html

Výpočet v prostředí Mathcad pro prohlížení výpočtu běžným prohlížečem (např. Internet Explorer), bez možnosti měnit výpočet, na ..\Mathcad\RTT_model_objekt.html

Komentovaný výpočet zobecněných sil Lagrangeovy pohybové rovnice při ručním vytvoření pohybových rovnic je také ukázán jako animace:

..\Animace\RTT_lagr_rucne\RTT_lagr_rucne.mp4

7.2.1 Přímá úloha dynamiky

Přímá úloha dynamiky je taková úloha, kdy známe kinematické veličiny (polohu, rychlost, zrychlení) jednotlivých pohybových jednotek, které spojují soustavu tuhých těles, a hledáme zobecněnou sílu v těchto pohybových jednotkách. V tvaru uvedeném výrazem (7-48) je možno Lagrangeovu rovnici poměrně snadno aplikovat. Předpokladem výpočtu je vyčíslení homogenních matic setrvačnosti $\mathbf{H}_i$ článků vzhledem k jejich lokálním souřadným systémům. Pro skutečné články mechanismů je tento výpočet možný jen při naprosto dokonalé technické dokumentaci článků. Přitom je nutno uvažovat nejen samotné články (většinou odlitky nebo výlisky s přepážkami a žebry pro zvýšení tuhosti a eliminaci vlastních mechanických frekvencí), ale i s "náplní" článků, tj. různými typy převodů a hřídelí, s "náplní" pohybových jednotek (motory, převodovky) a s elektronickým vybavením (inkrementální snímače, selsyny apod.) Pro reálné články mechanismů je možno provést výpočet pouze pomocí speciálních programových modulů některých CAD systémů (AutoCAD, Pro/Engineer a další) a je nutno zvážit dostupnost a přesnost jednotlivých údajů zejména v porovnání s dalšími nezahrnutými nebo jen obtížně modelovanými vlivy, jako je vliv tření a jeho závislosti na teplotě a stavu pohybové jednotky a dalšími. Přesné určení homogenních matic setrvačnosti je nezbytné, protože články jsou mnohdy z hlediska rozložení hmot značně nesymetrické a při řešení dynamiky prostorového pohybu není možno je nahradit "drátovým" modelem s momenty setrvačnosti pouze na hlavních osách, popř. s hmotností soustředěnou do těžiště, ale vyskytují se zde deviační momenty, které při prostorovém pohybu způsobují přídavné zatížení pohonů. Malé (řádově oproti hlavním) deviační momenty lze zanedbat. Vyčíslení matic $\mathbf{U}$ je jednoduché pomocí diferenciálních operátorů. Pro diskrétní časové okamžiky dostaneme tedy z rovnice (7-48) diskrétní hodnoty zobecněné síly $\tau_j = \tau_j \;\; t_k$.

7.2.2 Inverzní úloha dynamiky

Inverzní úloha je taková úloha, kdy známe průběh zobecněné síly působící na jednotlivé pohybové jednotky v čase a hledáme kinematické veličiny pohybu (polohu, rychlost, zrychlení) v čase. Tato úloha je důležitá např. pro ověření chování soustavy mechanického a řídicího systému. Úloha je řešena metodou lineární extrapolace rychlosti mezi jednotlivými diskrétními body trajektorie, která byla publikována na počátku osmdesátých let v (Frolov, 1988). Výchozí veličiny tedy jsou:

$\boldsymbol{\tau} \;\; t_k$ - vektor zobecněných sil v diskrétních časových okamžicích
$\mathbf{q} \;\; t_0$ - vektor zobecněných souřadnic polohy v čase $t_0 = 0$
$\dot{\mathbf{q}} \;\; t_0$ - vektor počátečních rychlostí v čase $t_0 = 0$

Nejprve jsou vypočteny homogenní transformační matice $\mathbf{T}_{bi}$ a všechny jejich derivace $\mathbf{U}_{ik}, \mathbf{U}_{ikl}$ ve výchozí poloze v čase $t_0 = 0$. Dosazením do Lagrangeovy rovnice (7-48) ji je možno převést na tvar

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}(t_0).\ddot{q}_k(t_0) = \beta_j(t_0) \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{7-49}$$

který představuje soustavu rovnic s n neznámými $\ddot{q}_k(t_0)$. Řešením soustavy rovnic dostaneme zrychlení jednotlivých pohybových dvojic ve výchozím bodě. Pro generování trajektorie v dalším uzlovém bodě $q(t_0 + \Delta t)$ použijeme lineární extrapolace rychlosti

$$\dot{q}(t_0 + \Delta t) = \dot{q}(t_0) + \ddot{q}(t_0).\Delta t \tag{7-50}$$

$$q(t_0 + \Delta t) = q(t_0) + \dot{q}(t_0).\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{q}(t_0).(\Delta t)^2 \tag{7-51}$$

Takto jsou postupně generovány jednotlivé body trajektorie pohybových jednotek. Trajektorie koncového bodu vznikne složením pohybu jednotlivých pohybových jednotek, tj. řešením přímé úlohy kinematiky.

Σ Shrnutí kapitoly

V této kapitole byl ukázán výpočet zobecněných sil na základě Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu. V příkladech byly ukázány dva základní způsoby použití Lagrangeovy pohybové rovnice - maticové řešení, jehož výhodou je menší pracnost a větší univerzálnost výpočtu zobecněných sil a nevýhodou delší doba výpočtu, která znemožňuje použití této metody v řízení mechanismu, a ruční odvození Lagrangeových pohybových rovnic, které je pracné a zdlouhavé, ale vede k jednoduchému a rychlému výpočtu zobecněných sil z pohybových rovnic. Tato metoda je vhodná pro řízení mechanismů.

? Otázky

1. Vysvětlete fyzikální význam jednotlivých veličin v Lagrangeově pohybové rovnici II. druhu.
2. Dají se z vypočtených zobecněných sil pomocí Lagrangeovy pohybové rovnice vypočíst akční síly?

8 POLOHOVÉ A RYCHLOSTNÍ SERVOSYSTÉMY ROBOTŮ

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl: Po prostudování této kapitoly budete umět

- sestavit algoritmus pro momentové řízení průmyslových robotů – tj. takové řízení, kdy řídicí systém vypočte na základě dynamického modelu mechanismu potřebné síly a momenty, které musí vyvinout pohonný systém v jednotlivých pohybových vazbách a nastavit jednoduchý zpětnovazební regulátor odchylky rychlosti a odchylky polohy.

Výklad

Podrobná analýza a syntéza základních typů regulátorů polohy a rychlosti není předmětem této publikace a je uvedena např. v (Čermák, 1986). Klasické principy regulace polohy jsou založeny na zpětnovazební smyčce polohy, kdy je skutečná (měřená) poloha porovnávána s žádanou a odchylka je vedena do regulátoru polohy, za kterým následuje podřízená zpětnovazební smyčka rychlosti, popř. proudu. Časové konstanty, které musí regulátor při správném nastavení kompenzovat, jsou v podstatě konstantní (popř. pomalé nebo relativně trvalé) a jsou způsobeny jednak hmotnostními parametry řízeného mechanického subsystému (většinou momenty setrvačnosti přepočtené na hřídel motoru) a jednak vlastnostmi elektrického obvodu (indukčnost kotvy, časové konstanty filtrů zpětnovazebních veličin). Při tomto způsobu regulace je regulační smyčka rychlosti podružná a umožňuje většinou pouze nastavení strmosti nárůstu rychlosti (zrychlení).
Zátěžné síly a momenty, které vznikají v důsledku zatížení pracovního článku a také vlivem dynamiky pohybu, jsou poruchovou veličinou, jejíž vliv musí regulátor vyrovnat. Tento způsob řízení polohy není vhodný pro mechanismy s více stupni volnosti, kdy výsledný pracovní pohyb vzniká složením pohybů jednotlivých článků a přitom je rozhodující trajektorie koncového bodu pro spojité řízení (continuous path). Při spojitém řízení je nutno současně řídit polohu a rychlost každé pohybové jednotky tak, aby výsledný složený pohyb pracovního článku odpovídal přesně zadané trajektorii.
Dalším problémem, který nastává u průmyslových robotů je rychlá změna prostorové konfigurace článků a s tím související rychlá a velká změna hmotnostních parametrů. Změny jsou tak velké a tak rychlé, že se s nimi i adaptivní regulátory vyrovnávají jen velmi obtížně a pouze regulace založená na dobré znalosti kinematického a dynamického modelu mechanismu přináší dobré výsledky. Jednu z nejčastěji používaných metod rychlého polohového řízení průmyslových robotů je tzv. „momentové řízení“, při kterém je aplikován algoritmus optimálního sledování trajektorie a při kterém zátěžný moment pohonů nevstupuje pouze jako poruchová veličina, ale je počítán na základě modelu dynamiky mechanického subsystému jako vstupní žádaná hodnota.

8.1 Algoritmus optimálního sledování trajektorie

Vyjdeme z modelu dynamiky prostorové soustavy tuhých článků, spojených holonomními vazbami s jedním stupněm volnosti, který lze obecně vyjádřit na základě Lagrangeovy pohybové rovnice ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}).\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q})=\tau \tag{8-1}$$

kde

$\mathbf{A}(\mathbf{q})$	-	čtvercová matice setrvačnosti všech hmot redukovaných na osy pohybu
$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$	-	matice sil způsobených odstředivým a Coriolisovým zrychlením
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	-	matice tíhových efektů
τ	-	vektor zobecněných sil pohybových jednotek
$\mathbf{q}$	-	vektor zobecněných souřadnic polohy (kloubové proměnné)
$\dot{\mathbf{q}}$	-	vektor zobecněných souřadnic rychlosti
$\ddot{\mathbf{q}}$	-	vektor zobecněných souřadnic zrychlení

Toto vyjádření může být doplněno dalšími členy, např. pro síly způsobené třením $\mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$. Na základě znalosti matic $\mathbf{A}(\mathbf{q}),\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}),\mathbf{G}(\mathbf{q})$ a popř. dalších jako je $\mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ je tedy možno vypočítat potřebnou zobecněnou sílu (v našem případě moment), kterou musí pohony vyvinout, aby se mechanický subsystém pohyboval po dané trajektorii s potřebnou rychlostí a zrychlením. Žádanou veličinou přicházející na regulátory jednotlivých pohonů je tedy moment. U elektrických pohonů můžeme zjednodušeně říci, že moment, který pohon vyvine, je úměrný proudu motoru, proto vlastně je momentové řízení realizováno řízením proudu motorem. Toto řízení proudu motorem je prakticky realizováno podřízenou regulační smyčkou proudu, která kompenzuje časovou konstantu elektrického obvodu τ_a, která je relativně malá (jednotky až desítky ms) oproti mechanické časové konstantě řízené soustavy τ_m, která se pohybuje v rozsahu stovky ms až sekundy. Při kompenzaci elektrických časových konstant pohonů je tedy jejich moment (proud) úměrný řídící veličině $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}^T \tag{8-2}$$

a pohybovou rovnici soustavy můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}).\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q})=\mathbf{K}.\mathbf{u} \tag{8-3}$$

kde $\mathbf{K}$ je diagonální matice konstant zesílení (přepočet mezi řídící veličinou a momentem motoru). Pro převod na normalizovaný dynamický podsystém (Zítek a Viteček, 1999) rovnici (8-3) upravíme do tvaru

$$\ddot{\mathbf{q}}=\underbrace{-\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}).\left[\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q})\right]}_{\mathbf{f}_Z(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})}+\underbrace{\left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{q}).\mathbf{K}\right)}_{\mathbf{G}_Z(\mathbf{q})}.\mathbf{u} \tag{8-4}$$

a dále zobecníme na tvar

$$\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{f}_z(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}_z(\mathbf{q}).\mathbf{u} \tag{8-5}$$

Vektorová funkce $\mathbf{f}_z(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$, představuje složky zobecněné síly způsobené Coriolisovým a odstředivým zrychlením, tíhovými efekty článků a třením v kloubech přepočtené inverzní maticí setrvačnosti na zrychlení a matice $\mathbf{G}_z(\mathbf{q})$ obsahuje kromě zesílení $\mathbf{K}$ zejména inverzní matici setrvačnosti mechanického systému. Řídící veličina $\mathbf{u}$ (převedená na moment) bezprostředně ovlivňuje zrychlení $\ddot{\mathbf{q}}$, rychlost $\dot{\mathbf{q}}$ pak je ovlivněna až zprostředkovaně podle vztahu

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\int_0^t \ddot{\mathbf{q}}(t)\,dt \tag{8-6}$$

Z hlediska vlastností vektorové funkce $\mathbf{f}_z(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ a matice $\mathbf{G}_z(\mathbf{q})$ se jedná o standardní dynamický podsystém typu 2 (Zítek a Víteček, 1999), který je globálně řiditelný. Pro optimální zpětnovazební řízení platí (Víteček, 1991)

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{G}_z^{-1}(\mathbf{q}).\mathbf{m} \tag{8-7}$$

kde **m** má pro mezní aperiodický průběh složky

$$m_i = \frac{1}{T_i^2}\left(q_i^d - q_i\right) + \frac{2}{T_i}\left(\dot{q}_i^d - \dot{q}_i\right) + \ddot{q}_i^d - f_i(\mathbf{x}) \tag{8-8}$$

respektive

$$m_i = k_p\left(q_i^d - q_i\right) + k_v\left(\dot{q}_i^d - \dot{q}_i\right) + \ddot{q}_i^d - f_i(\mathbf{x}) \tag{8-9}$$

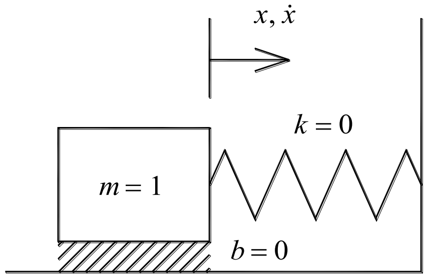
Výraz (8-9) má obdobný tvar jako PD regulátor polohy, k jehož výstupu je přičtena hodnota zrychlení $\ddot{q}_i^d$ s kompenzací příspěvku k zobecněné síle způsobenému Coriolisovým a odstředivým zrychlením, třením a případnými dalšími vlivy. Tento regulátor je tedy optimální z hlediska sledování trajektorie pro dynamické subsystémy charakterizované pohybovou rovnicí (8-1), převedené na standardní tvar (8-5). Pro řízené dynamické podsystémy standardního typu takto dochází k externí linearizaci, která spočívá v kompenzaci všech nelinearit. Z hlediska fyzikálního významu řídící veličina **u*** (vynásobená maticí konstant **K**) v sobě obsahuje zejména moment, který musí soustava pohonů vyvinout, aby se články pohybovaly se zrychlením $\ddot{q}_i^d$ a další momenty potřebné pro kompenzaci tíhových efektů článků a Coriolisových a odstředivých zrychlení.

8.2 Momentové řízení

Momentové řízení (Computed torque control) (Craig, *J.J.*, 1986) vychází ze základního předpokladu, že pohonný subsystém musí v každém časovém okamžiku vyvinout právě takový potřebný moment (zobecněnou sílu), aby se daný článek mechanismu pohyboval po žádané trajektorii s daným průběhem rychlosti a zrychlení. Tato metoda vychází tedy z dobré znalosti matematického modelu mechanismu, kdy dokážeme průběh všech kinematických a dynamických veličin vypočítat ať už v reálném čase (velké nároky na hardware řídícího počítače) nebo předem (playback).

Dokonalé realizaci této metody řízení brání dva základní nedostatky - nepřesný matematický model mechanismu zejména v oblasti modelování převodů, jejich pružnosti, přesnosti, hystereze, tření apod. a dále neschopnost reálných pohonů vyvinout potřebný průběh momentu zejména v náročných dynamických stavech (vlastní dynamické vlastnosti pohonů).

Přes uvedené problémy je tato metoda řízení pro dynamicky náročné systémy velmi dobře aplikovatelná a nepřesnosti v matematickém modelu soustavy mechanismus-pohon jsou potlačovány zpětnovazebním řízením s vhodnou strukturou. V současné době je tato metoda nejpoužívanější v polohových servosystémech zejména průmyslových robotů a manipulátorů. Pro osvojení metody je vhodný následující zjednodušený příklad na Obr. 8-1.



Obr. 8-1

Těleso o hmotnosti m = 1 se pohybuje po podložce se třením b = 0 a je připojeno pružinou o tuhosti k = 0. Předpokládán je translační pohyb s jedním stupněm volnosti ve směru osy x, k dispozici je skutečná výchylka x a rychlost $\dot{x}$. Pohybová rovnice tělesa je ve tvaru

$$f = m\ddot{x} = \ddot{x} \tag{8-10}$$

Pro účely řízení polohy je aplikován algoritmus optimálního sledování trajektorie ve tvaru

$$f = \ddot{x}_d + k_v \;\; \dot{x}_d - \dot{x} \;\; + k_p \;\; x_d - x \tag{8-11}$$

kde $x_d, \dot{x}_d, \ddot{x}_d$ jsou průběhy žádaných hodnot polohy, rychlosti a zrychlení. Po porovnání rovnic (8-10) a (8-11) a zavedení poruchové veličiny ve tvaru $e = x_d - x$ dostaneme vyjádření pohybové rovnice v prostoru poruchových veličin ve tvaru

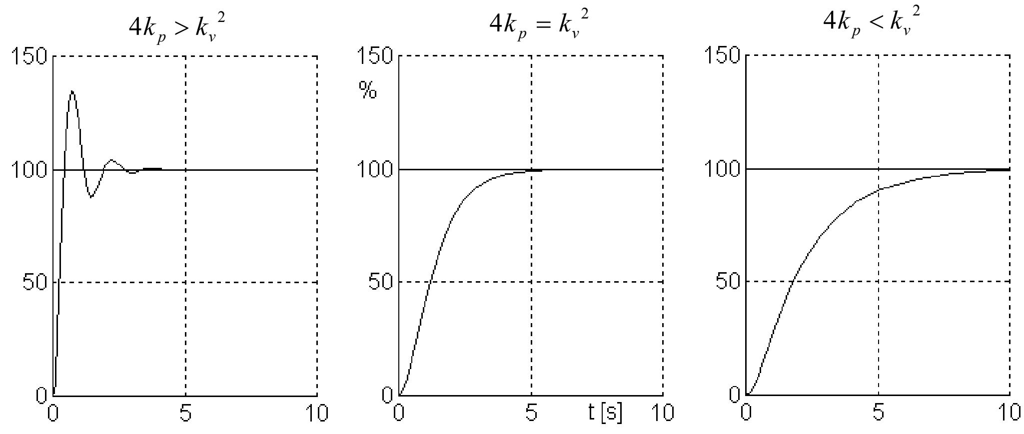
$$\ddot{e} + k_v\dot{e} + k_p e = 0 \tag{8-12}$$

Průběh poruchové veličiny e (a tedy i dráhy x) závisí na velikosti koeficientů k_p, k_v a je dán umístěním pólů charakteristické rovnice v imaginární rovině

$$s^2 + k_v s + k_p = 0 \tag{8-13}$$

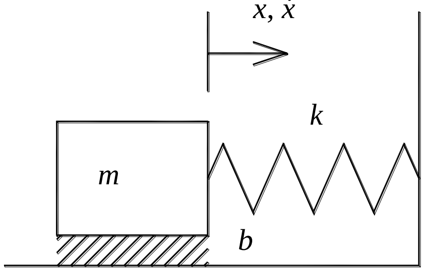
$$s_{1,2} = \frac{-k_v \pm \sqrt{k_v^{\,2} - 4k_p}}{2} \tag{8-14}$$

Odezva systému na skokovou změnu žádané polohy v závislosti na poměru konstant k_p a k_v je ukázána na Obr. 8-2 pro periodický průběh, pro mezní periodický průběh a pro aperiodický průběh.



Obr. 8-2

Z hlediska řízení polohy je optimální mezní aperiodický průběh. Velikost konstant k_p a k_v určuje kvalitu regulace. Zvyšování těchto konstant zvětšuje zesílení odchylky polohy a rychlosti, zvyšuje přesnost a rychlost regulace, ale také zvyšuje velikost akční veličiny (síly) působící na řízený objekt.



Obr. 8-3

Výše uvedený algoritmus řízení polohy lze uplatnit na reálný příklad, kdy hmotnost *m* není jednotková a objekt má reálné vazby s okolím, tj. tření o velikosti *b* a tuhost pružiny *k* - Obr. 8-3. V tomto případě je pohybová rovnice tělesa ve tvaru

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f \tag{8-15}$$

Řídící algoritmus rozdělíme na dvě části - část "*dynamický model*" a část "*jednotkový servosystém*". Část *dynamický model* předpokládá znalost parametrů řízeného objektu, tj. *m, b, k.* Na modelovou část je aplikován řídící algoritmus ve tvaru

$$f = \alpha f' + \beta \tag{8-16}$$

Aplikací řídícího algoritmu (8-16) na objekt s pohybovou rovnicí (8-15) dostaneme výslednou pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = \alpha f' + \beta \tag{8-17}$$

Pokud dosadíme $\alpha = m$ a $\beta = b\dot{x} + kx$ dostaneme stejný výsledný vztah $\ddot{x} = f'$ jako v rovnici (8-10), tj. řízený objekt se po aplikaci části řídícího algoritmu nazvané *dynamický model* (8-16) chová navenek jako jednotková hmotnost s nulovým třením a nulovou tuhostí pružiny. Tento princip se nazývá *redukce* (v literatuře také *kompenzace*) skutečného systému s reálnými parametry na systém s jednotkovou hmotností bez vazeb. Takovýto systém lze stejně jako v předchozím příkladě dle Obr. 8-1 řídit druhou částí algoritmu nazvanou *jednotkový servosystém* dle vztahu

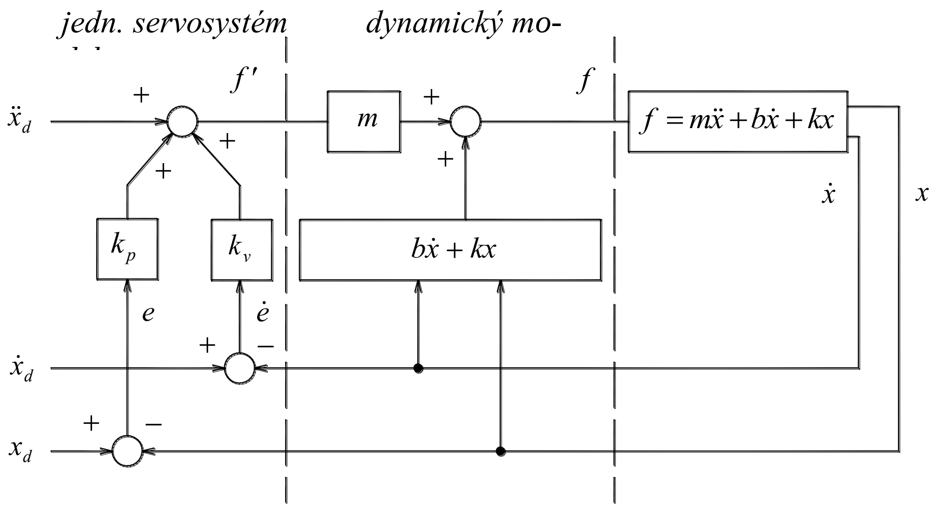
$$f' = \ddot{x}_d + k_v\dot{e} + k_p e \tag{8-18}$$

Řídící algoritmus je zobrazen na Obr. 8-4. Do části *model* řídícího algoritmu mohou být zahrnuty i další vlivy, např. nelineární charakteristika pružiny. Pak je pohybová rovnice tělesa dána např.

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + qx^3 = f \tag{8-19}$$

Dále může být použito Coulombovo tření

$$m\ddot{x} + b_c sign\ \dot{x}\ + kx = f \tag{8-20}$$



Obr. 8-4

Pro všechny tyto případy je metoda členění řídícího algoritmu výhodná. Modelová část výpočtem odstraní "nelinearity" řízeného systému tak, že se jeví jako jednotková hmotnost bez vazeb. Na tento systém je pak použit jednoduchý lineární servosystém. Stejný princip může být aplikován na polohové řízení soustavy hmotných těles s vazbami, jakou je například průmyslový robot. Vztahy jsou obdobné, na místě všech členů výrazů (8-15), (8-16) jsou odpovídající matice. Pohybovou rovnici soustavy hmotných těles je možno napsat na základě Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu v maticovém tvaru

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}).\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q})=\boldsymbol{\tau} \tag{8-21}$$

Část řídícího algoritmu nazývaná *dynamický model* je stejně jako v předchozím příkladě realizována obdobným vztahem v maticové podobě

$$\mathbf{F}=\alpha\mathbf{F}'+\beta \tag{8-22}$$

kde

$$\alpha=\mathbf{A}(\mathbf{q}) \tag{8-23}$$

$$\beta=\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{F}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q}) \tag{8-24}$$

Část řídícího algoritmu *jednotkový servosystém* je realizována maticovým vztahem

$$\mathbf{F}'=\ddot{\mathbf{q}}_d+\mathbf{K}_v.\dot{\mathbf{E}}+\mathbf{K}_p.\mathbf{E} \tag{8-25}$$

Po rozepsání poruchové veličiny

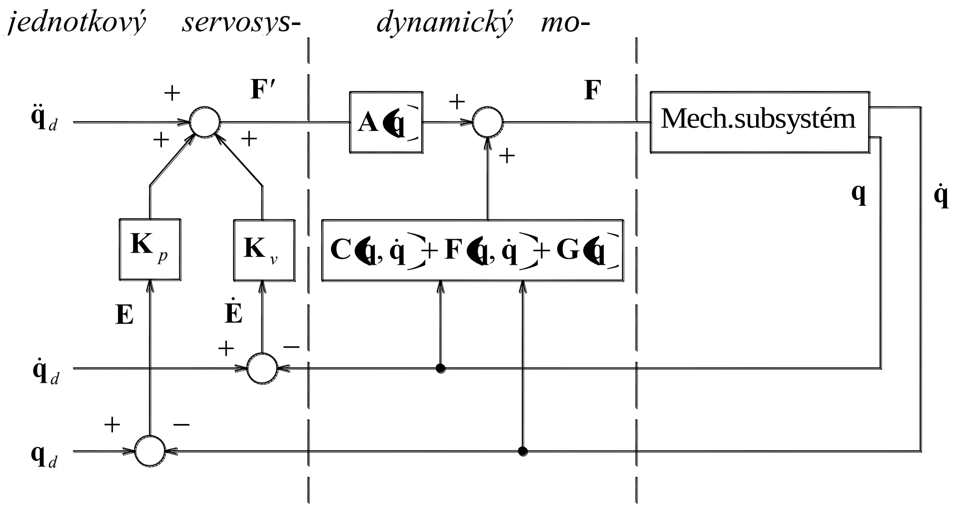
$$\mathbf{F}'=\mathbf{K}_p(\mathbf{q}^d-\mathbf{q})+\mathbf{K}_v(\dot{\mathbf{q}}^d-\dot{\mathbf{q}})+\ddot{\mathbf{q}} \tag{8-26}$$

Aplikací části řídícího algoritmu *dynamický model* je provedena linearizace a rozpojení pohybů jednotlivých článků (v angl. lit. *decoupling*) tak, že každý článek se chová jako jednotková hmotnost (popř. jednotkový moment setrvačnosti) bez vazeb. Řídící algoritmus je znázorněn na Obr. 8-5. Jednotlivé maticové parametry „modelové“ části řídícího algoritmu jsou určeny na základě aplikace Lagrangeovy pohybové rovnice v maticovém tvaru.

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) = \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right] \qquad (8\text{-}27)$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k \qquad (8\text{-}28)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = -\sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\ \mathbf{p}_i^{*}\ {}_i \qquad (8\text{-}29)$$



Obr. 8-5

Shrnutí kapitoly

V této kapitole byl ukázán princip momentového řízení mechanismů, tj. takového řízení, kdy řídicí systém na základě dynamického modelu mechanismu vypočte předem momenty (zobecněné síly), které musí pohony vyvinout, aby se koncový bod pohyboval po žádané trajektorii.

Otázky

1. Jaký je princip momentového řízení?
2. Jaký účel mají dva základní bloky algoritmu momentového řízení – jednotkový servosystém a dynamický model?

9 MECHATRONICKÝ PŘÍSTUP K VYTVÁŘENÍ ROBOTICKÝCH SYSTÉMŮ

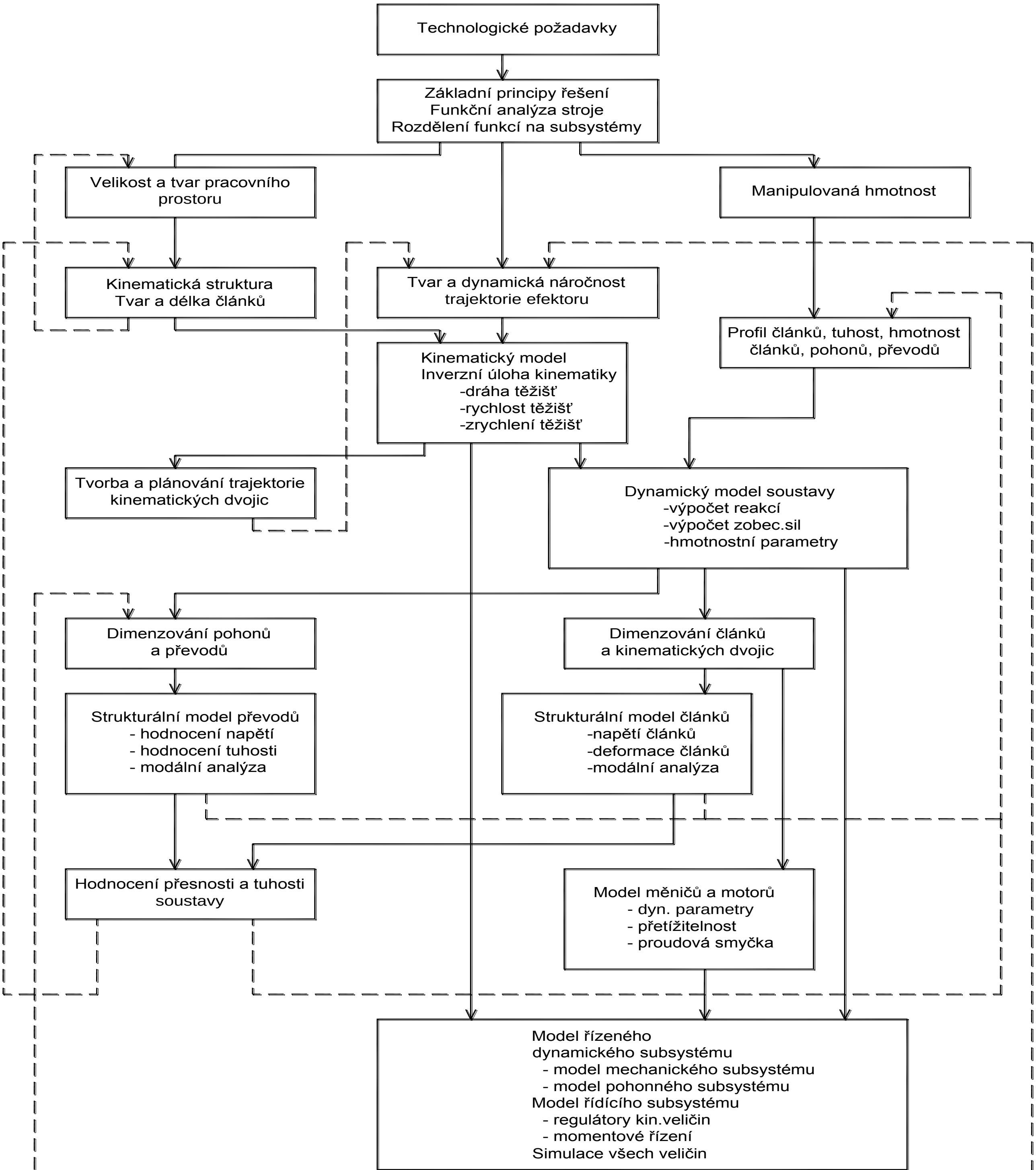
Mechatronika je spojení znalostí strojního inženýrství, metod řízení a umělé inteligence a technických prostředků řízení, tj. elektroniky a moderních pohonů. Mechatronický přístup je v posledních letech často diskutován a sestává v podstatě ze současného vytváření mechanického, pohonného a řídícího subsystému a optimalizování jeho komponent v součinnosti všech subsystémů tak, aby výsledné užitné vlastnosti byly co nejvyšší při co nejnižších nákladech na vývoj a výrobu. Z dnešního pohledu má vlastně většina strojů a zařízení mechatronickou povahu a obsahuje základní subsystémy - mechanický subsystém, řídící subsystém včetně senzorů a pohonný subsystém. Při komplexním technickém řešení robotů a návrhu strojů obecně se jejich subsystémy natolik vzájemně ovlivňují, že se ukazuje nutnost realizace kvalitních matematických a simulačních modelů jednotlivých subsystémů s definovanými návaznostmi, které by sloužily profesním specialistům k optimálnímu řešení. Metodika návrhu pohonů robotů je uvedena v (Mostýn a Skařupa, 1997). Metodika návrhu robotických systémů je diskutována dále v pracích (Skařupa a Mostýn, 1997 a 2000). Problematika mechatroniky je natolik široká, že ji není možno vyčerpávajícím způsobem obsáhnout v rámci jedné publikace. Tato publikace se soustředí na mechatronický přístup ke konstruování z pohledu strojního inženýra a zabývá se zejména modelováním kinematiky a dynamiky mechanismů v návaznosti na dimenzování pohonů a analýzu mechanického subsystému pro návrh řízení. Základní metodické kroky při návrhu mechatronického systému jsou:

- analýza technologických požadavků (funkce, rozsah pohybu, dynamická charakteristika pohybu, manipulované hmotnosti, vyvíjené síly, momenty)
- funkční analýza stroje, principiální řešení jednotlivých funkčních skupin, návrh kinematické struktury
- kinematická analýza a syntéza mechanismu (řešení přímé a inverzní úlohy kinematiky pro polohu, rychlost a zrychlení jednotlivých pohybových komponent stroje
- dynamická analýza mechanismu stroje (analýza silového působení jednotlivých uzlů vzájemně a na základ stroje
- dimenzování mechanického subsystému (ramena, převody, pohybové jednotky)
- dimenzování pohonného subsystému (motory, měniče, napájecí subsystém)
- řešení řídícího subsystému (regulátory pohonů, vyšší úroveň řízení)
- optimalizace stroje v součinnosti jednotlivých subsystémů

Podstatou řešení je postupné iterační zpřesňování parametrů, a to funkčních, hmotnostních i pevnostních, které ve fázi prvního návrhu volíme na základě zkušeností, technické invence, popř. na základě obdobných konstrukcí (Skařupa, 1998). Cílem řešení jsou maximální užitné vlastnosti stroje při minimálních nákladech na výrobu. Jedním z důležitých aspektů konkurenceschopnosti výrobku je také doba řešení. Z těchto důvodů jsou v této publikaci prezentovány výpočetní metody, které lze přes jejich relativní složitost snadno naprogramovat a tak zrychlit cyklus iteračního zpřesňování. Předložené matematické metody modelování mechanického subsystému jsou koncipovány převážně jako univerzální, tj. vhodné pro libovolnou kinematickou strukturu mechanismu. Potíže nastávají pouze při řešení inverzní úlohy kinematiky mechanismů s uzavřenými smyčkami, kdy je třeba použít speciálních přístupů uvedených např. v (Brát, 1981) nebo (Valášek, 1996). Po úspěšném řešení inverzní kinematické úlohy jsou pak metody modelování dynamického chování mechanismů bez problémů. Výstupy z uvedených metod slouží jak strojním inženýrům v oblasti dimenzování článků a pohybových jednotek mechanismů, tak profesním specialistům v oblasti řízení pro syntézu regulátorů polohy a rychlosti článků. Metodika dimenzování akčních subsystémů robotů je uvedena např. v (Skařupa, 1997).

Cílem této publikace je přispět ke komplexnímu mechatronickému přístupu k vytváření technických systémů obecně a zvýšení schopnosti komunikace mezi profesními specialisty v oblastech mechaniky, řízení a regulovaných pohonů.

Na Obr. 9-1 je uveden příklad mechatronického přístupu ke konstrukci průmyslového robotu, který lze zevšeobecnit na stroje obecně. Plnými čárami jsou znázorněny postupné etapy analýzy a syntézy jednotlivých subsystémů stroje, čárkovanými čarami jsou znázorněny hlavní zpětné vazby a vlivy na parametry jednotlivých bloků.

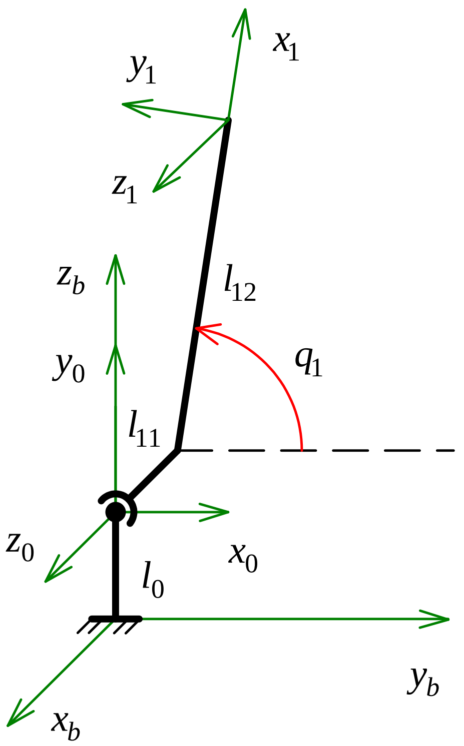


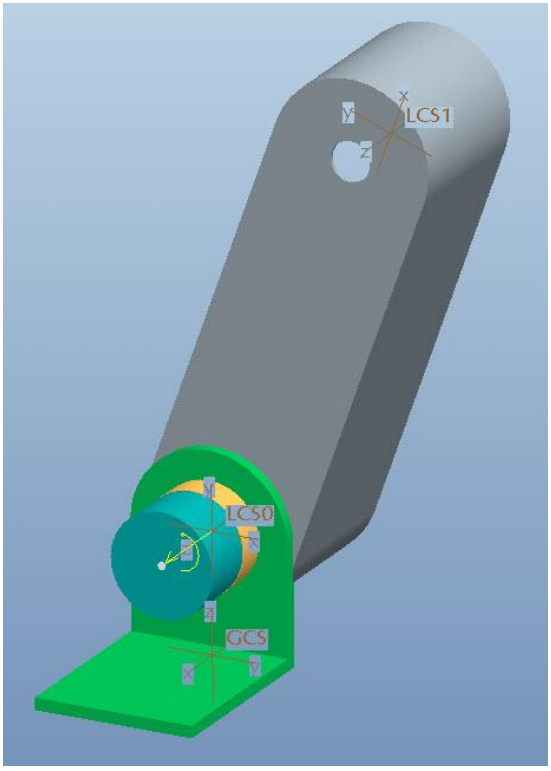
Obr. 9-1

10 VÝPISY ŘEŠENÝCH PŘÍKLADŮ V PROSTŘEDÍ MATHCAD

10.1 Přímá úloha kinematiky – mechanismus s jedním stupněm volnosti

Výpis příkladu s názvem *1dof_rotace_prima_uloha.xmcd*





Obr. 10-1 Kinematické schéma a 3D model analyzovaného mechanismu

$ORIGIN := 1$ $\qquad$ $t := 0, 0.05 .. 0.5$

Tabulka D-H parametrů

i	theta	d	a	alfa
0	Pi/2	l_0	0	Pi/2
1	q_1	$-l_{11}$	l_{12}	0

Rozměry článků

$l_0 := 0.3$

$l_{12} := 1$

$l_{11} := 0.235$

Alternativní možnost zadání průběhu polohy kloubu v čase - zadáním průběhu zrychlení, popř. rychlosti a integrací tohoto průběhu.

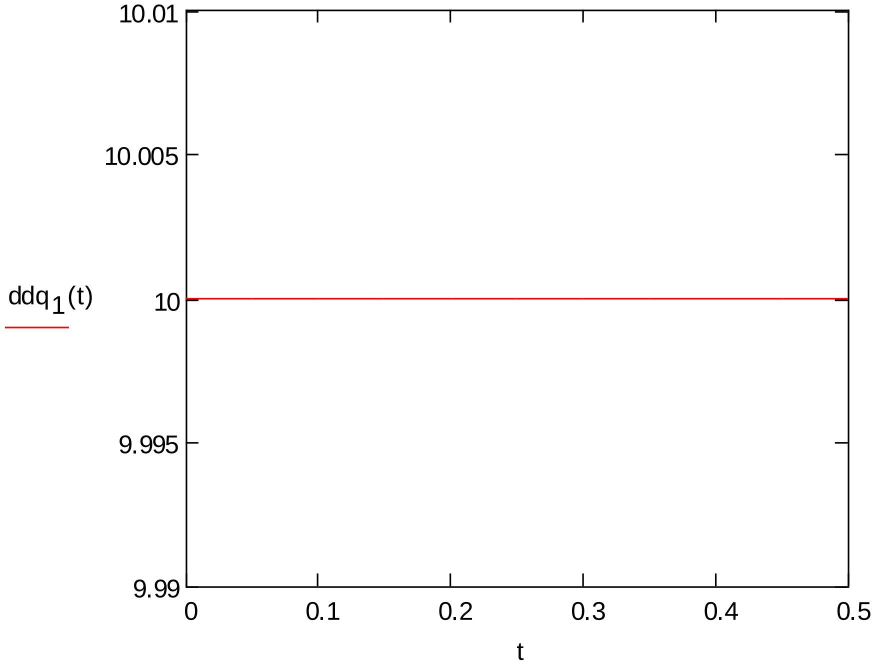
$dq_0 := 0$ $\qquad$ $q_0 := 0$

V prostředí Pro/E je nutno zadávat úhlové míry ve stupních, 10 rad/sec^2 je 572,958 deg/sec^2

$ddq_1(t) := 10$

$ddq_1(t)$

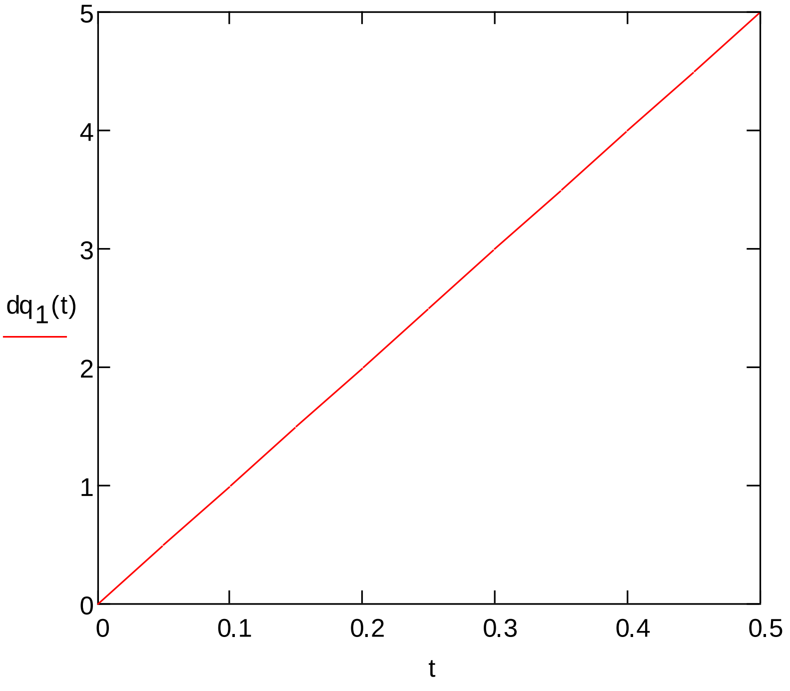
10
10
10
10
10
10
10
10
10
10
10



$$dq_1(t) := \int_0^t ddq_1(t)\,dt + dq_0$$

$dq_1(t) =$

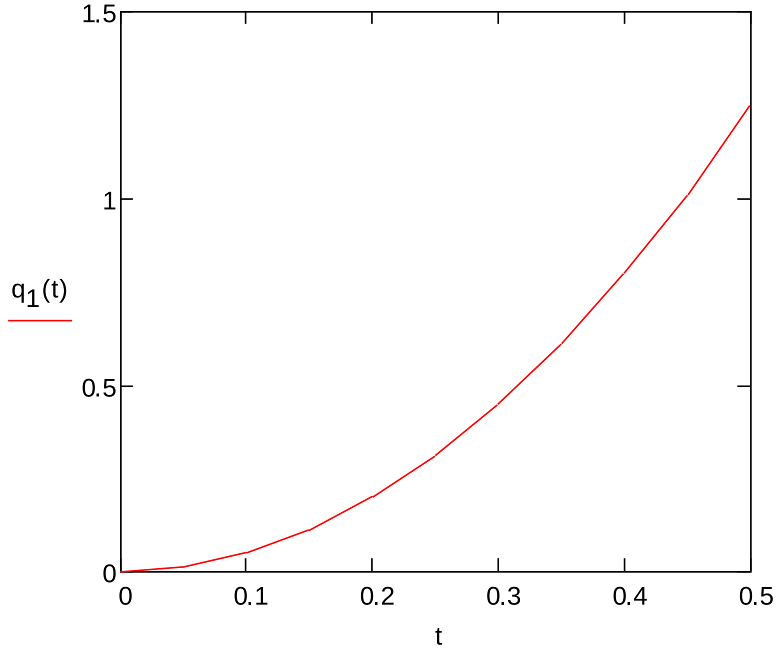
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5



$$q_1(t) := \int_0^t dq_1(t)\, dt + q_0$$

$q_1(t) =$

0
0.0125
0.05
0.1125
0.2
0.3125
0.45
0.6125
0.8
1.0125
1.25

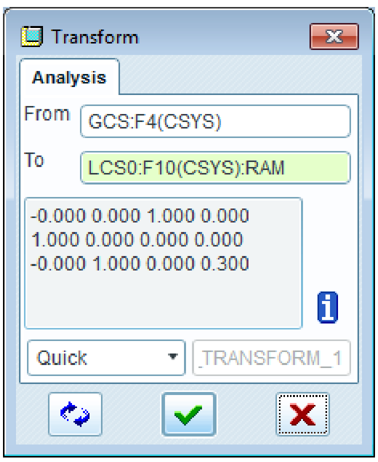


Transformační matice mezi základním (bázovým) souřadným systémem GCS a lokálním souřadným systémem LCS0 rámu (podstavce)

$\theta_0 := \frac{\pi}{2}$ $\quad d_0 := 0.3$ $\quad a_0 := 0$ $\quad \alpha_0 := \frac{\pi}{2}$

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0)\cdot\cos(\alpha_0) & \sin(\theta_0)\cdot\sin(\alpha_0) & a_0\cdot\cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0)\cdot\cos(\alpha_0) & -\cos(\theta_0)\cdot\sin(\alpha_0) & a_0\cdot\sin(\theta_0) \\ 0 & \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

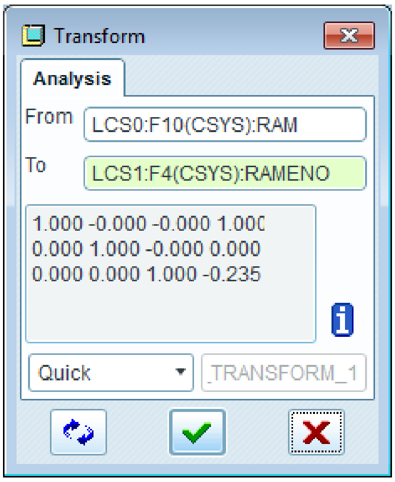
$$A_{b0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$\theta_1(t) := q_1(t) \qquad d_1 := -0.235 \qquad a_1 := 1 \qquad \alpha_1 := 0$

$$A_{01}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) & -\sin(\theta_1(t))\cdot\cos(\alpha_1) & \sin(\theta_1(t))\cdot\sin(\alpha_1) & a_1\cdot\cos(\theta_1(t)) \\ \sin(\theta_1(t)) & \cos(\theta_1(t))\cdot\cos(\alpha_1) & -\cos(\theta_1(t))\cdot\sin(\alpha_1) & a_1\cdot\sin(\theta_1(t)) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{01}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.235 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Po úpravě (vhodnější pro Mathcad)

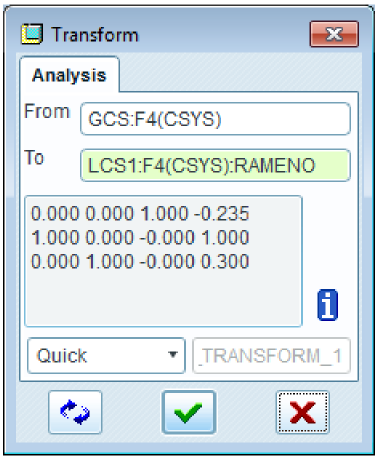
$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

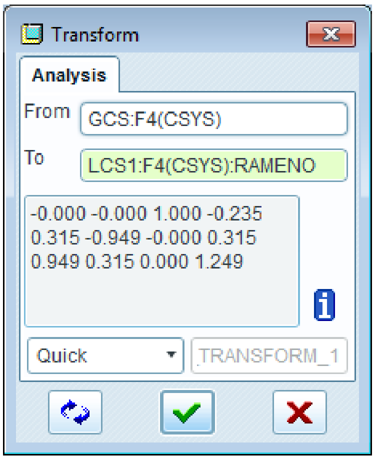
$$A_{01}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & \cos(q_1(t)) \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) \\ 0 & 0 & 1 & -0.235 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.235 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & \cos(q_1(t)) \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) \\ 0 & 0 & 1 & -0.235 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.235 \\ \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & \cos(q_1(t)) \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) + 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.235 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{b1}(0.5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -0.235 \\ 0.3153224 & -0.9489846 & 0 & 0.3153224 \\ 0.9489846 & 0.3153224 & 0 & 1.2489846 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$





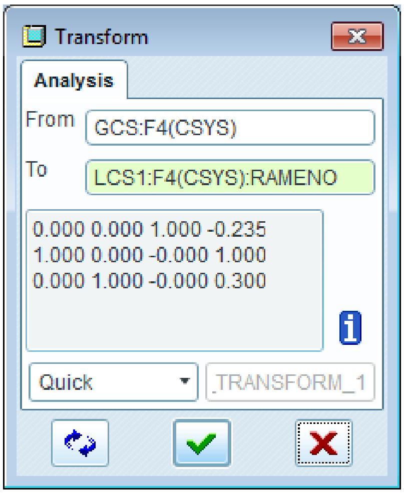
Směry jednotkových vektorů na osách posledního ss (LCS1) a jejich vyčíslení v čase 0 a 0,5 (místo 0 lze zadat čas v rozsahu nastavené proměnné času)

$$i_1(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b1}(t), 1, 3, 1, 1)$$

$$i_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad i_1(0.5) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.3153224 \\ 0.9489846 \end{pmatrix}$$

$$j_1(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b1}(t), 1, 3, 2, 2)$$

$$j_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad j_1(0.5) = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.9489846 \\ 0.3153224 \end{pmatrix}$$



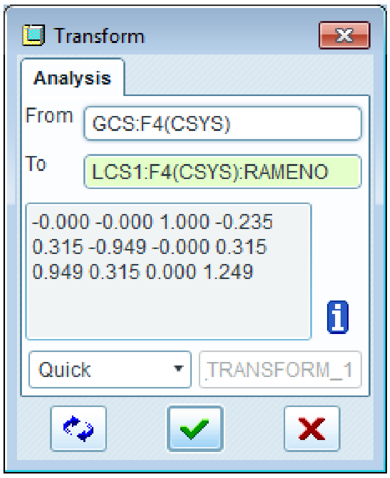
Transformační matice pro t=0

$$k_1(t) := \mathrm{submatrix}\left(T_{b1}(t), 1, 3, 3, 3\right)$$

$$k_1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad k_1(0.5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$O_1(t) := \mathrm{submatrix}\left(T_{b1}(t), 1, 3, 4, 4\right)$$

$$O_1(0) = \begin{pmatrix} -0.235 \\ 1 \\ 0.3 \end{pmatrix} \qquad O_1(0.5) = \begin{pmatrix} -0.235 \\ 0.3153224 \\ 1.2489846 \end{pmatrix}$$



Transformační matice pro t=0,5

Průběh polohy koncového bodu

$$x(t) := T_{b1}(t)_{1,4} \qquad y(t) := T_{b1}(t)_{2,4} \qquad z(t) := T_{b1}(t)_{3,4}$$

$x(t) =$

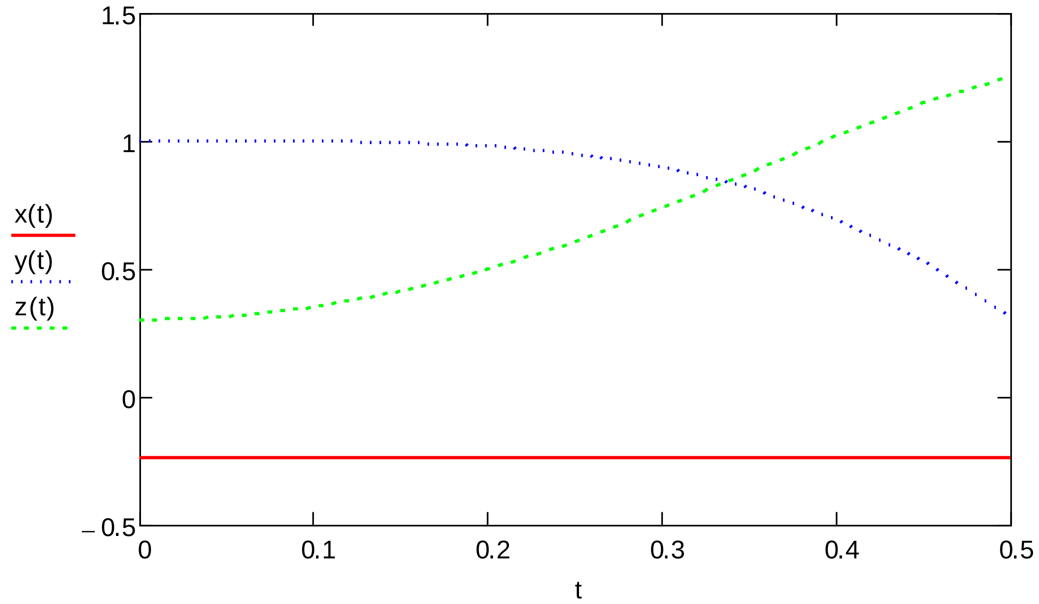
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235
-0.235

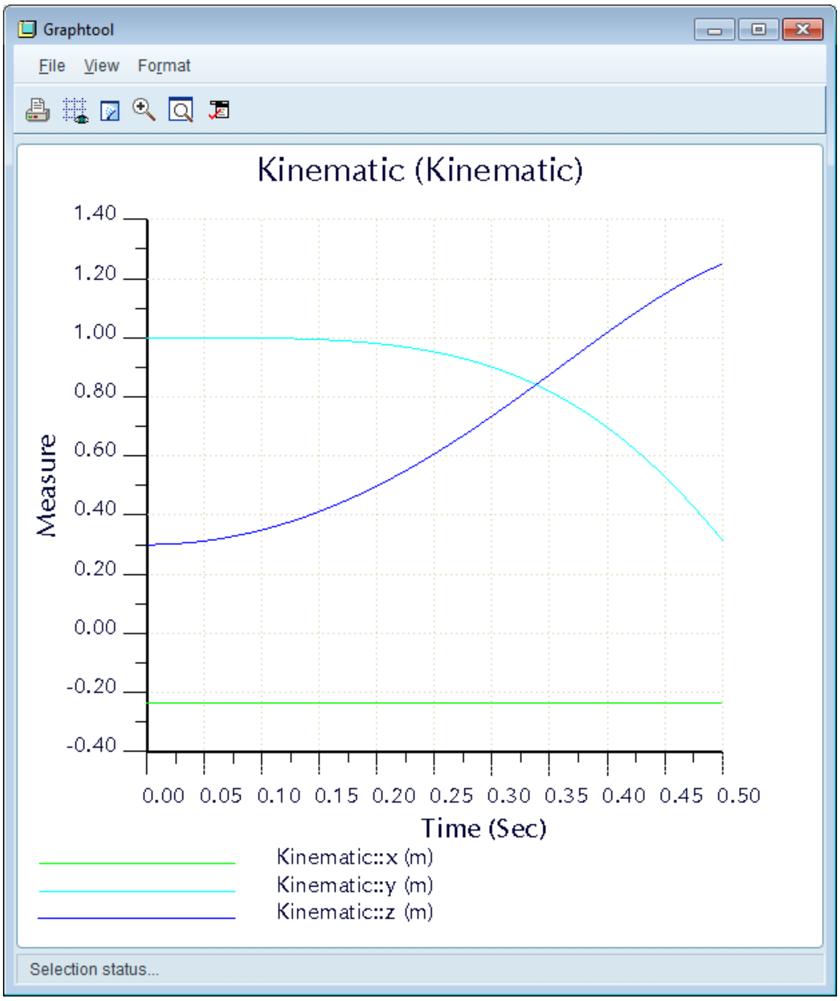
$y(t) =$

1
0.9999219
0.9987503
0.9936785
0.9800666
0.9515679
0.9004471
0.8182133
0.6967067
0.529742
0.3153224

$z(t) =$

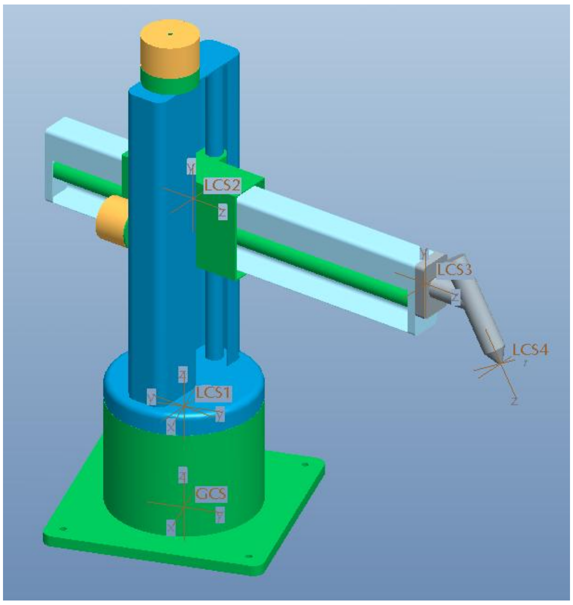
0.3
0.3124997
0.3499792
0.4122628
0.4986693
0.6074385
0.7349655
0.8749148
1.0173561
1.1481588
1.2489846

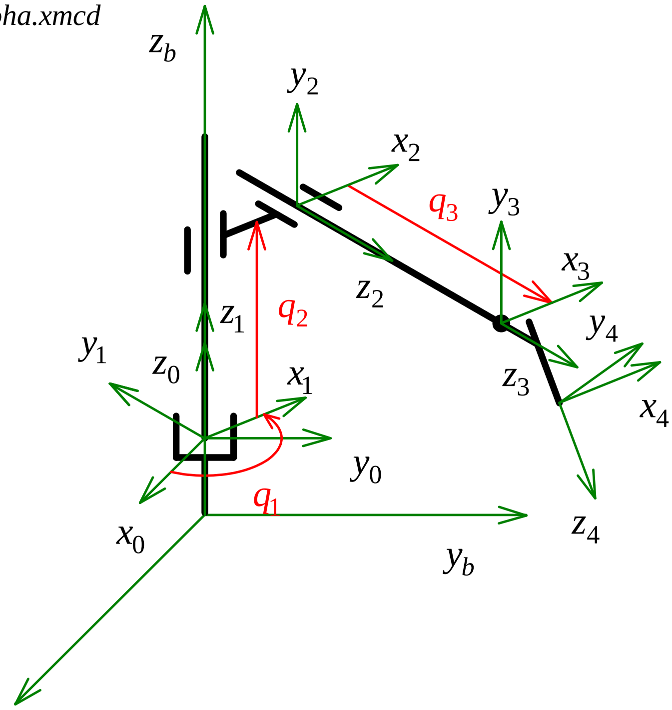



Graphtool
File View Format
Kinematic (Kinematic)
1.40
1.20
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
-0.20
-0.40
Measure
0.00 0.05 0.10 0.15 0.20 0.25 0.30 0.35 0.40 0.45 0.50
Time (Sec)
Kinematic::x (m)
Kinematic::y (m)
Kinematic::z (m)
Selection status...

10.2 Přímá úloha kinematiky – mechanismus se třemi stupni volnosti (RTT)

Výpis příkladu s názvem *RTT_hlavice_prima_uloha.xmcd*





Obr. 10-2 3D model a kinematické schéma vyšetřovaného mechanismu

Tabulka parametrů (Denavit-Hartenberg)

	theta	d	a	alfa
0	0	l0	0	0
1	q1	0	0	0
2	0	q2	l2	Pi/2
3	0	q3	0	0
4	DH parametry nepoužity			

$l_0 := 0.500$

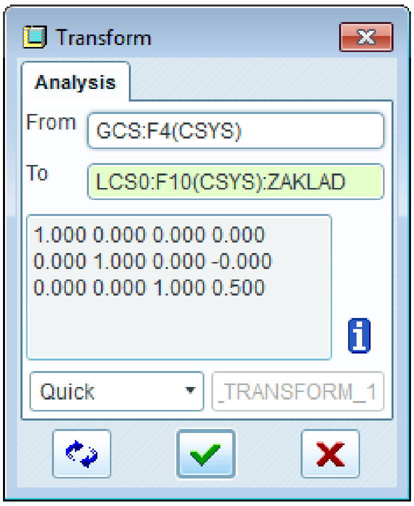
$l_2 := 0.065$

$ORIGIN := 1 \quad t := 0, 0.5 .. 3$ rozsah času pro definici pohybu

$\theta_0 := 0 \qquad d_0 := 0.500 \quad a_0 := 0 \qquad \alpha_0 := 0$

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0)\cdot\cos(\alpha_0) & \sin(\theta_0)\cdot\sin(\alpha_0) & a_0\cdot\cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0)\cdot\cos(\alpha_0) & -\cos(\theta_0)\cdot\sin(\alpha_0) & a_0\cdot\sin(\theta_0) \\ 0 & \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{b0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Zjednodušená matice Ab0

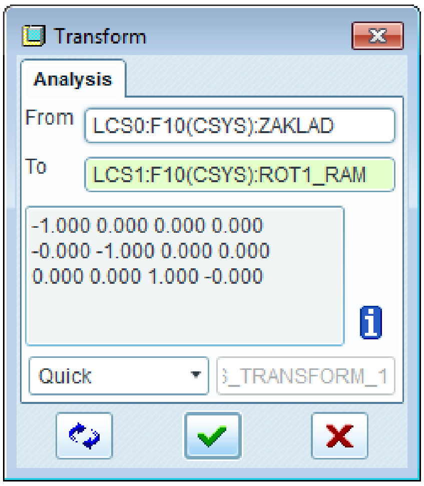
$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q_1(t) := \pi - 0.5 \cdot t$ Zadání průběhu 1. zobecněné souřadnice (natočení)

$\theta_1(t) := q_1(t)$ $\quad d_1(t) := 0$ $\quad a_1 := 0$ $\quad \alpha_1 := 0$

$$A_{01}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1(t)) & -\sin(\theta_1(t)) \cdot \cos(\alpha_1) & \sin(\theta_1(t)) \cdot \sin(\alpha_1) & a_1 \cdot \cos(\theta_1(t)) \\ \sin(\theta_1(t)) & \cos(\theta_1(t)) \cdot \cos(\alpha_1) & -\cos(\theta_1(t)) \cdot \sin(\alpha_1) & a_1 \cdot \sin(\theta_1(t)) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & d_1(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{01}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Zjednodušená matice A01

$$A_{01}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

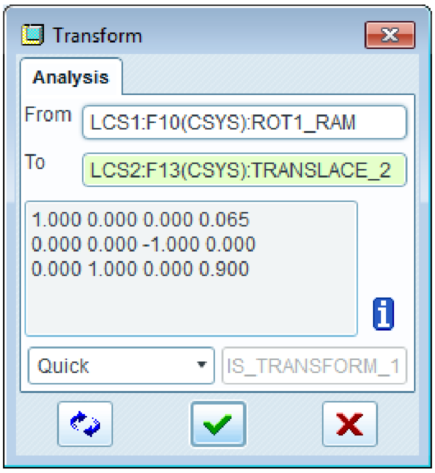
Zadání průběhu 2. zobecněné souřadnice (zdvih)

$q_2(t) := 0.9 + 0.1 \cdot t$

$\theta_2(t) := 0$ $\quad d_2(t) := q_2(t)$ $\quad a_2 := 0.065$ $\quad \alpha_2 := \dfrac{\pi}{2}$

$$A_{12}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2(t)) & -\sin(\theta_2(t))\cdot\cos(\alpha_2) & \sin(\theta_2(t))\cdot\sin(\alpha_2) & a_2\cdot\cos(\theta_2(t)) \\ \sin(\theta_2(t)) & \cos(\theta_2(t))\cdot\cos(\alpha_2) & -\cos(\theta_2(t))\cdot\sin(\alpha_2) & a_2\cdot\sin(\theta_2(t)) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & d_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Zjednodušená matice A12

$$A_{12}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

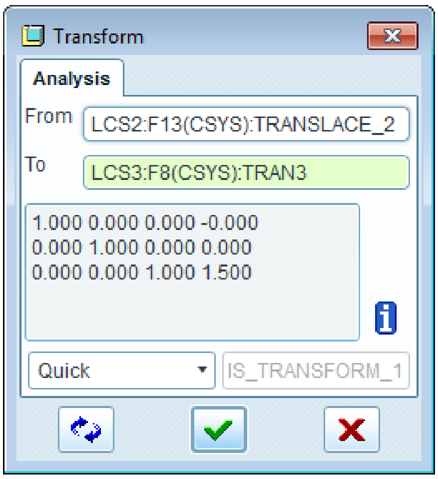
Zadání průběhu 3. zobecněné souřadnice (výsuv)

$$q_3(t) := 1.5 - 0.2\cdot t$$

$\theta_3(t) := 0$ $\quad d_3(t) := q_3(t)$ $\quad a_3 := 0$ $\quad \alpha_3 := 0$

$$A_{23}(t) := \begin{pmatrix} \cos(\theta_3(t)) & -\sin(\theta_3(t))\cdot\cos(\alpha_3) & \sin(\theta_3(t))\cdot\sin(\alpha_3) & a_3\cdot\cos(\theta_3(t)) \\ \sin(\theta_3(t)) & \cos(\theta_3(t))\cdot\cos(\alpha_3) & -\cos(\theta_3(t))\cdot\sin(\alpha_3) & a_3\cdot\sin(\theta_3(t)) \\ 0 & \sin(\alpha_3) & \cos(\alpha_3) & d_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

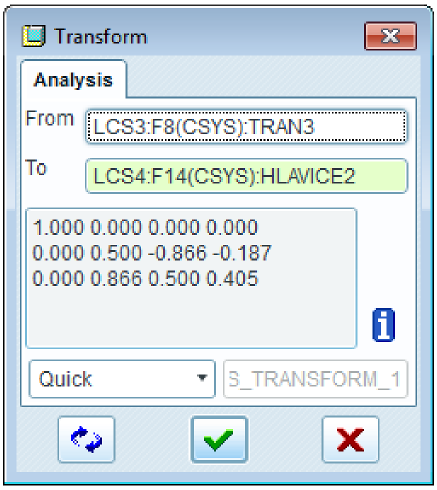


Zjednodušená matice A23

$$A_{23}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poslední transformační matice mezi LCS3 a LCS4 (hlavice) je určena odměřením v prostředí Pro/E. Matice je konstantní, proto není funkcí času.

$$A_{34} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.500 & -0.866 & -0.187 \\ 0 & 0.866 & 0.500 & 0.405 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



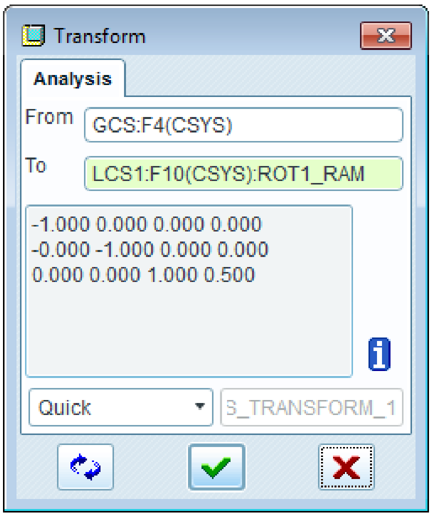
Vyčíslení transformačních matic mezi základním a lokálními souřadnými systémy, tyto matice jsou také vypočteny symbolicky (Shift+F9)

$$T_{b1}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t)$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

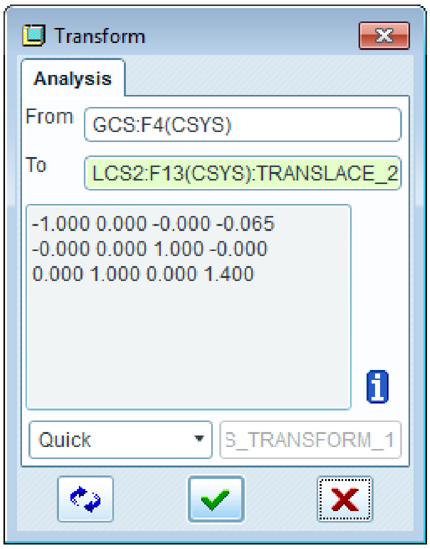
$$T_{b1}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$T_{b2}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t)$$

$$T_{b2}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) & 0.065 \cdot \cos(q_1(t)) \\ \sin(q_1(t)) & 0 & -\cos(q_1(t)) & 0.065 \cdot \sin(q_1(t)) \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) + 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



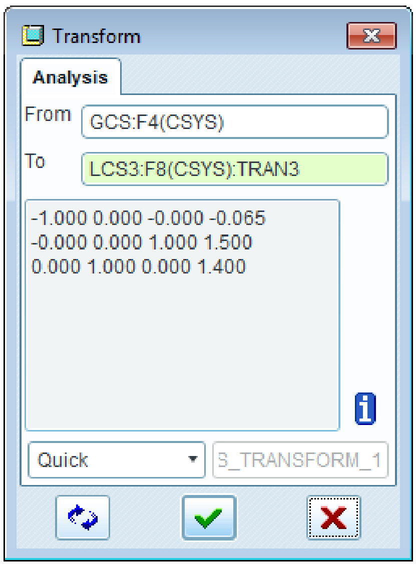
$$T_{b2}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t)$$

$$T_{b3}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) & \sin(q_1(t)) \cdot q_3(t) + 0.065 \cdot \cos(q_1(t)) \\ \sin(q_1(t)) & 0 & -\cos(q_1(t)) & -\cos(q_1(t)) \cdot q_3(t) + 0.065 \cdot \sin(q_1(t)) \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) + 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



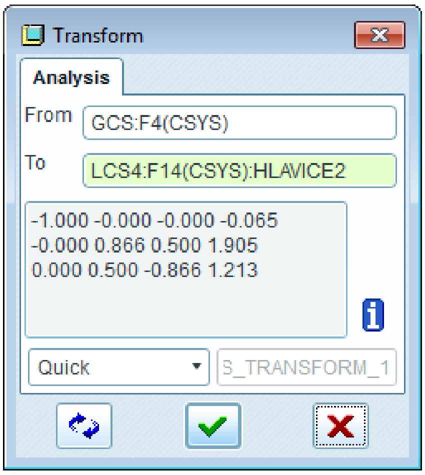
Celková transformační matice mezi základním ss (GCS) a posledním ss (LCS4)

$$T_{b4}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t) \cdot A_{34}$$

$$T_{b4}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.500 & -0.866 & -0.187 \\ 0 & 0.866 & 0.500 & 0.405 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b4}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0.866 \cdot \sin(q_1(t)) & 0.5 \cdot \sin(q_1(t)) & 0.065 \cdot \cos(q_1(t)) + 0.405 \cdot \sin(q_1(t)) + q_3(t) \cdot \sin(q_1(t)) \\ \sin(q_1(t)) & -0.866 \cdot \cos(q_1(t)) & -0.5 \cdot \cos(q_1(t)) & 0.065 \cdot \sin(q_1(t)) + -0.405 \cdot \cos(q_1(t)) - q_3(t) \cdot \cos(q_1(t)) \\ 0 & 0.5 & -0.866 & q_2(t) + 0.313 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b4}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0.866 & 0.5 & 1.905 \\ 0 & 0.5 & -0.866 & 1.213 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Směry jednotkových vektorů na osách posledního ss (LCS4)

$$i_4(t) := \text{submatrix}(T_{b4}(t), 1, 3, 1, 1) \qquad j_4(t) := \text{submatrix}(T_{b4}(t), 1, 3, 2, 2)$$

$$k_4(t) := \text{submatrix}(T_{b4}(t), 1, 3, 3, 3) \qquad O_4(t) := \text{submatrix}(T_{b4}(t), 1, 3, 4, 4)$$

Vyčíslení směrů jednotlových vektorů na osách LCS4 v čase 0 (místo 0 lze zadat čas 0-3 sec)

$$i_4(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.866 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad k_4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.866 \end{pmatrix} \qquad O_4(0) = \begin{pmatrix} -0.065 \\ 1.905 \\ 1.213 \end{pmatrix}$$

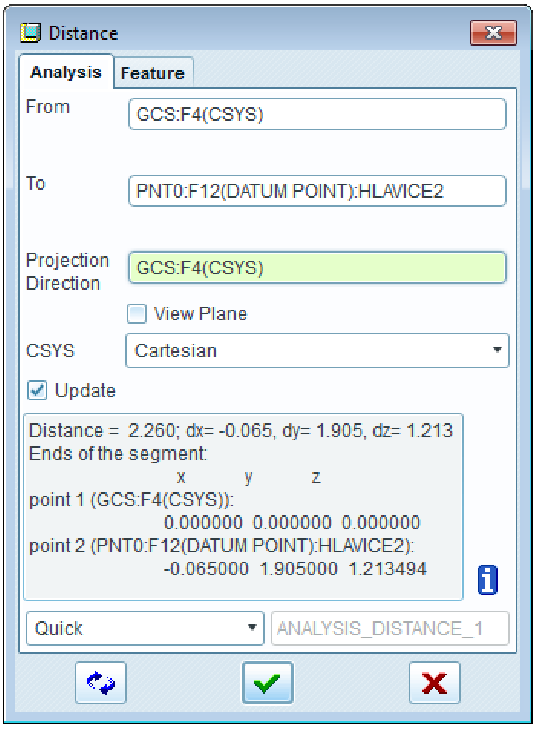
$$x(t) := T_{b4}(t)_{1,4}$$

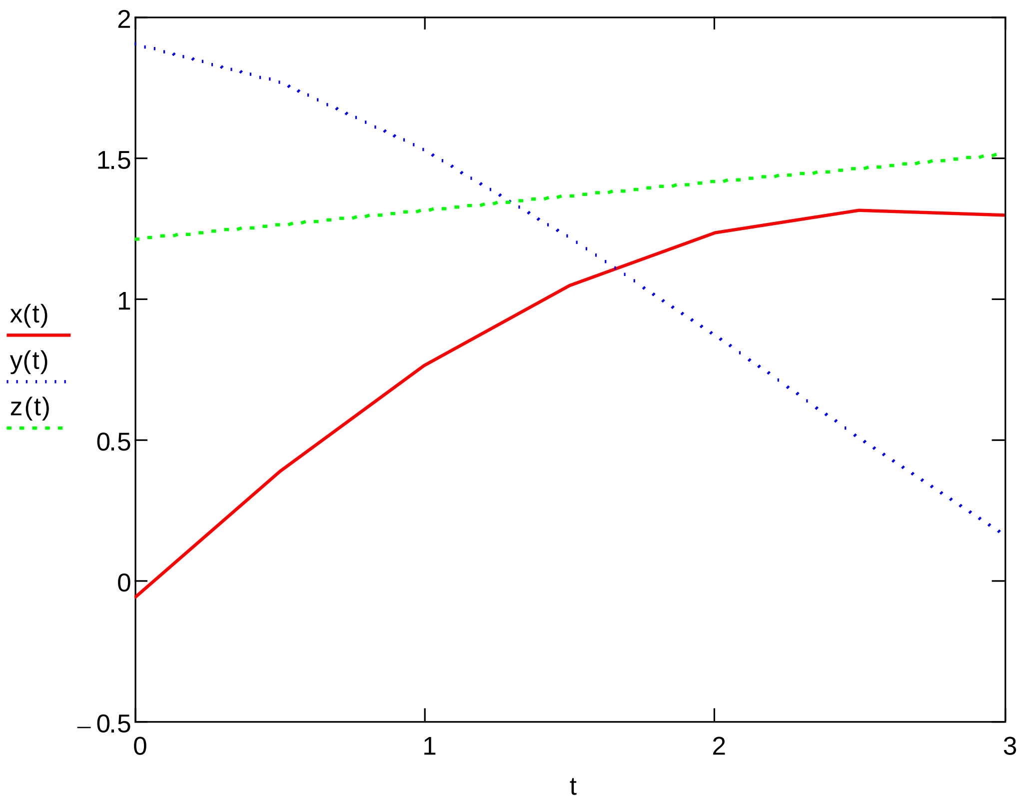
$$y(t) := T_{b4}(t)_{2,4}$$

$$z(t) := T_{b4}(t)_{3,4}$$

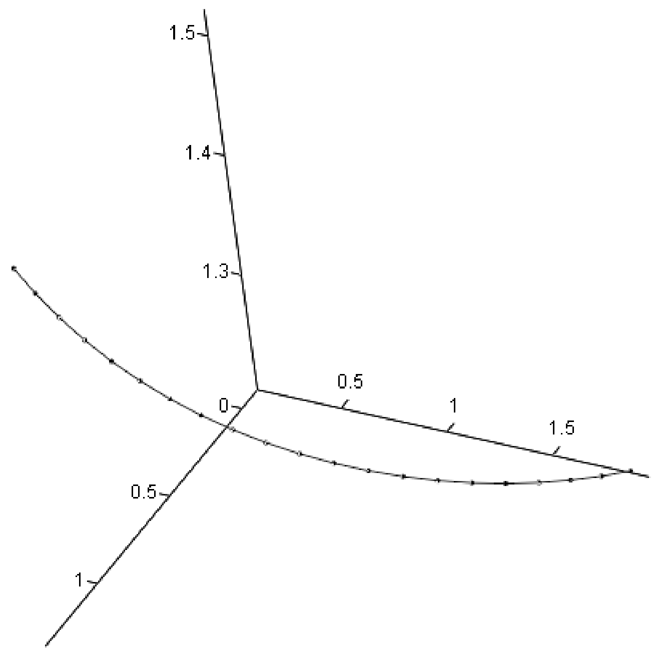
Průběh polohy koncového bodu

$x(t) =$	$y(t) =$	$z(t) =$
-0.065	1.905	1.213
0.384	1.765	1.263
0.76	1.527	1.313
1.046	1.219	1.363
1.231	0.868	1.413
1.313	0.505	1.463
1.297	0.157	1.513



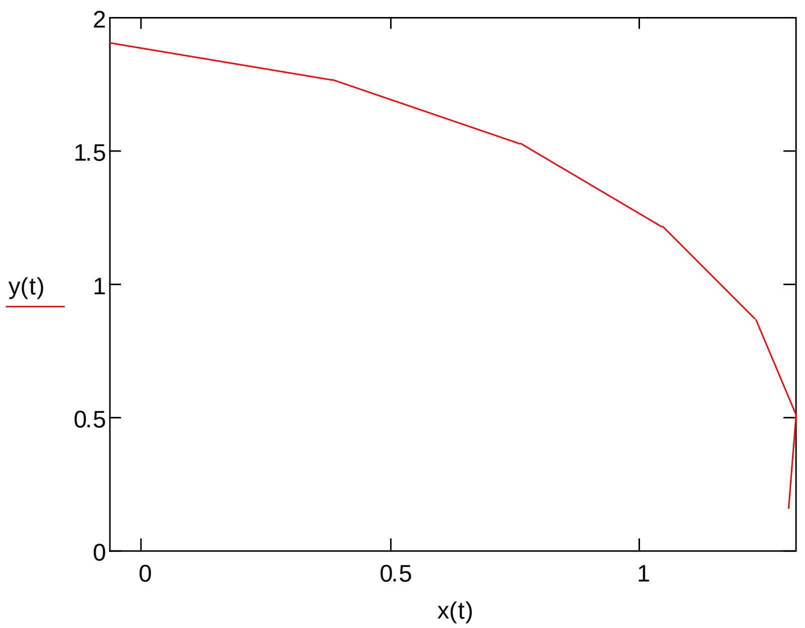


Průběh polohy koncového bodu ve 3D zobrazení



(x, y, z)

Průmět trajektorie do půdorysu (roviny xy)

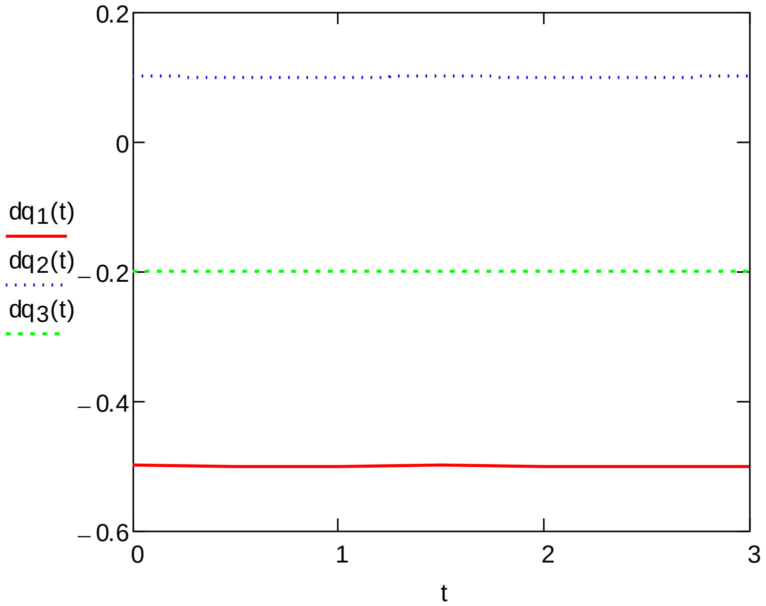


Řešení přímé úlohy kinematiky pro rychlost koncového bodu

Diferenciální operátory pro rotaci a translaci

$$D_R := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_T := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dq_1(t) := \frac{d}{dt}q_1(t) \qquad dq_2(t) := \frac{d}{dt}q_2(t) \qquad dq_3(t) := \frac{d}{dt}q_3(t)$$



$$v_4(t) := \begin{pmatrix} A_{b0} \cdot D_R \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t) \cdot A_{34} \cdot dq_1(t) \ \ldots \\ + A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_T \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t) \cdot A_{34} \cdot dq_2(t) \ \ldots \\ + A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot D_T \cdot A_{23}(t) \cdot A_{34} \cdot dq_3(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_4(2) = \begin{pmatrix} 0.266 \\ -0.724 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_x(t) := v_4(t)_1 \qquad v_y(t) := v_4(t)_2 \qquad v_z(t) := v_4(t)_3$$

$v_x(t) =$

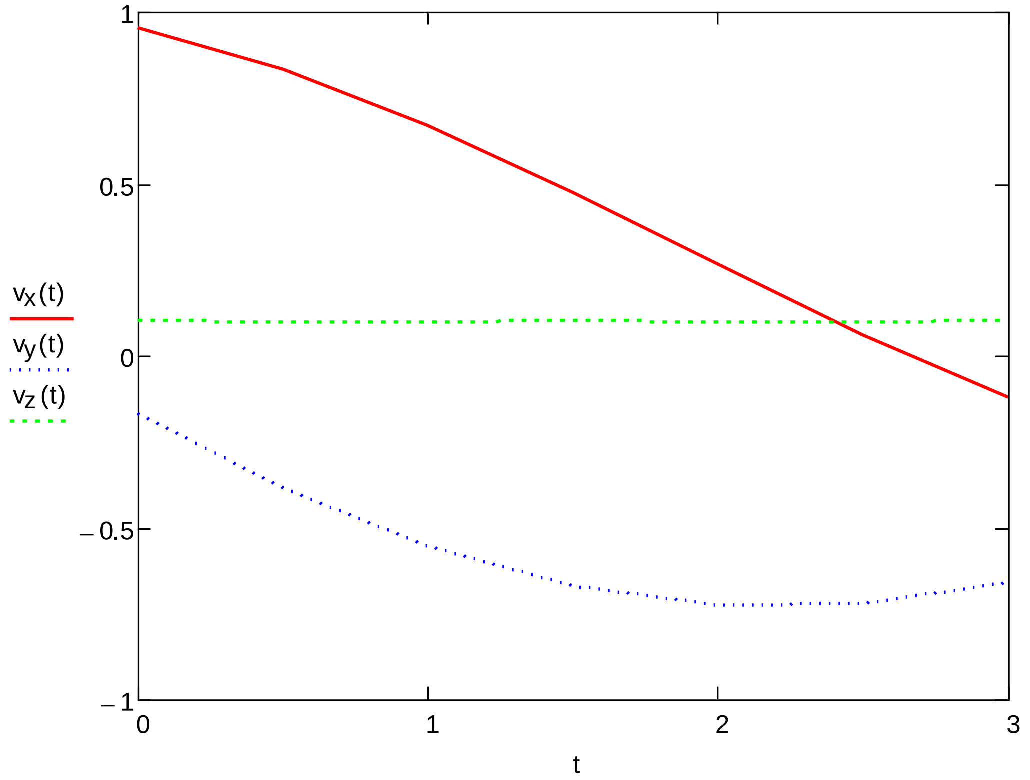
0.952
0.833
0.668
0.473
0.266
0.063
-0.121

$v_y(t) =$

-0.168
-0.386
-0.556
-0.67
-0.724
-0.719
-0.663

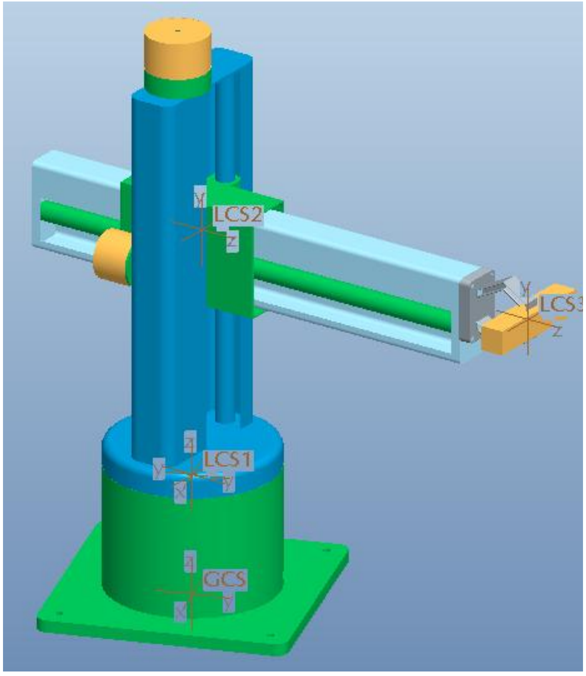
$v_z(t) =$

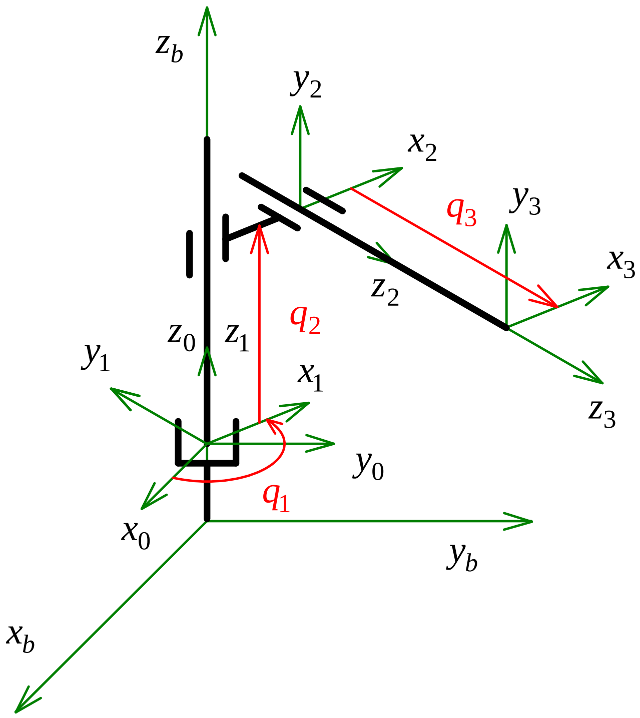
0.1
0.1
0.1
0.1
0.1
0.1
0.1



10.3 Inverzní úloha kinematiky – Taylorův rozvoj transformační matice

Výpis příkladu s názvem *RTT_inverzni_Taylor.xmcd*





Obr. 10-3 3D model a kinematické schéma vyšetřovaného mechanismu

Tabulka parametrů (Denavit-Hartenberg)

ORIGIN := 1

	theta	d	a	alfa
0	0	0.554	0	0
1	q1	0	0	0
2	0	q2	0.065	Pi/2
3	0	q3	0	0

Výchozí poloha - pro výchozí polohu a výpočet inverzní úlohy jsou na místě kloubových proměnných použity proměnné s_1, s_2, a s_3. Kloubové proměnné q_1, q_2 a q_3 jsou použity pro kontrolu správnosti výpočtu.

$s_1 := \pi \qquad s_2 := 0.9 \qquad s_3 := 1.01$

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$T_{b3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TV := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Žádaná poloha

$q_1 := 3 \qquad q_2 := 0.6 \qquad q_3 := 0.8$

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$TD := T_{b3}$$

$$TD = \begin{pmatrix} -0.98999 & 0 & 0.14112 & 0.04855 \\ 0.14112 & 0 & 0.98999 & 0.80117 \\ 0 & 1 & 0 & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy transcendentních rovnic je provedeno jako kontrolní řešení správnosti výpočtu pomocí Taylorova rozvoje transformační matice.

Definice inverzní funkce

Given

$$s_3 \cdot \sin(s_1) + 0.065 \cdot \cos(s_1) = x$$

$$0.065 \cdot \sin(s_1) - s_3 \cdot \cos(s_1) = y$$

$$s_2 + 0.554 = z$$

$$Q(x, y, z) := \mathrm{Find}(s_1, s_2, s_3)$$

$$Q(0.04855, 0.80117, 1.154) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Řešení metodou Taylorova rozvoje transformační matice

Diferenciální operátory

Rotační kloub

$$D_r := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Translační kloub

$$D_t := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

První iterační krok

Výchozí poloha

$s_1 := \pi \qquad s_2 := 0.9 \qquad s_3 := 1.01$

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$TV := T_{b3}$$

Je vypočtena transformační matice Tb3 ve výchozí poloze a je uložena jako matice TV, matice TD - žádaná poloha zůstává konstantní.

$$TV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad TD = \begin{pmatrix} -0.98999 & 0 & 0.14112 & 0.04855 \\ 0.14112 & 0 & 0.98999 & 0.80117 \\ 0 & 1 & 0 & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé parciální derivace do rozvoje transformační matice

$$U_{31} := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$U_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1.01 \\ -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{32} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot D_t \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$U_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{33} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot D_t \cdot A_{23}$$

$$U_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sestavená soustava rovnic (obrázek z učebního textu) bude řešena maticově

$$u_{1,4}^{31}.\Delta q_1 + u_{1,4}^{32}.\Delta q_2 + u_{1,4}^{33}.\Delta q_3 = t_{1,4}^{d} - t_{1,4}^{v}$$
$$u_{2,4}^{31}.\Delta q_1 + u_{2,4}^{32}.\Delta q_2 + u_{2,4}^{33}.\Delta q_3 = t_{2,4}^{d} - t_{2,4}^{v}$$
$$u_{3,4}^{31}.\Delta q_1 + u_{3,4}^{32}.\Delta q_2 + u_{3,4}^{33}.\Delta q_3 = t_{3,4}^{d} - t_{3,4}^{v}$$

Matice koeficientů u proměnných

$$C := \begin{pmatrix} U31_{1,4} & U32_{1,4} & U33_{1,4} \\ U31_{2,4} & U32_{2,4} & U33_{2,4} \\ U31_{3,4} & U32_{3,4} & U33_{3,4} \end{pmatrix}$$

Inverze matice koeficientů

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -0.9901 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0.06436 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice pravých stran

$$B := \begin{pmatrix} TD_{1,4} - TV_{1,4} \\ TD_{2,4} - TV_{2,4} \\ TD_{3,4} - TV_{3,4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.11355 \\ -0.20883 \\ -0.3 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy rovnic je matice D

$$D := C^{-1}.B \qquad D = \begin{pmatrix} -0.11242 \\ -0.3 \\ -0.21614 \end{pmatrix}$$

Krok, který je potřeba udělat z výchozí polohy směrem k řešení je tedy

$$\Delta s_1 := D_{1,1}$$
$$\Delta s_2 := D_{2,1}$$
$$\Delta s_3 := D_{3,1}$$

Vypočtení nové výchozí polohy

$$s_1 := s_1 + \Delta s_1$$

$$s_2 := s_2 + \Delta s_2$$

$$s_3 := s_3 + \Delta s_3$$

Pro kontrolu porovnání s již předem vypočtenými referenčními hodnotami

$s_1 = 3.02917$ $\quad q_1 = 3$

$s_2 = 0.6$ $\quad q_2 = 0.6$

$s_3 = 0.79386$ $\quad q_3 = 0.8$

Při pohledu na vypočtené kloubové proměnné vidíme, že s_1 se liší o 29 tisícin radiánu, s_2 je již vypočtena přesně (je nastaveno zobrazování na 5 desetinných míst), s_3 se liší zhruba o 7 mm. Je tedy nutná další iterace. Je to způsobeno poměrně velkým rozdílem mezi výchozí a žádanou polohou. Pokud bude tento rozdíl malý, řešení je nalezeno již po jedné iteraci.

Druhá iterace - výrazy jsou zkopírovány z předchozí iterace

Matice v nové výchozí poloze

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$TV := T_{b3}$$

Je vypočtena transformační matice Tb3 ve výchozí poloze a je uložena jako matice TV, matice TD - žádaná poloha zůstává konstantní.

$$TV = \begin{pmatrix} -0.99369 & 0 & 0.11219 & 0.02447 \\ 0.11219 & 0 & 0.99369 & 0.79614 \\ 0 & 1 & 0 & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad TD = \begin{pmatrix} -0.98999 & 0 & 0.14112 & 0.04855 \\ 0.14112 & 0 & 0.98999 & 0.80117 \\ 0 & 1 & 0 & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé parciální derivace do rozvoje transformační matice

$$U_{31} := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$U_{31} = \begin{pmatrix} -0.11219 & 0 & -0.99369 & -0.79614 \\ -0.99369 & 0 & 0.11219 & 0.02447 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{32} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot D_t \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$U_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{33} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot D_t \cdot A_{23}$$

$$U_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.11219 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99369 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice koeficientů u proměnných

$$C := \begin{pmatrix} {U_{31}}_{1,4} & {U_{32}}_{1,4} & {U_{33}}_{1,4} \\ {U_{31}}_{2,4} & {U_{32}}_{2,4} & {U_{33}}_{2,4} \\ {U_{31}}_{3,4} & {U_{32}}_{3,4} & {U_{33}}_{3,4} \end{pmatrix}$$

Inverze matice koeficientů

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1.25172 & 0.14132 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.03082 & 1.00287 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice pravých stran

$$B := \begin{pmatrix} TD_{1,4} - TV_{1,4} \\ TD_{2,4} - TV_{2,4} \\ TD_{3,4} - TV_{3,4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0.02408 \\ 5.0268 \times 10^{-3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy rovnic je matice D

$$D := C^{-1} \cdot B \qquad D = \begin{pmatrix} -0.02943 \\ 0 \\ 5.78338 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Krok, který je potřeba udělat z výchozí polohy směrem k řešení je tedy

$$\Delta s_1 := D_{1,1}$$
$$\Delta s_2 := D_{2,1}$$
$$\Delta s_3 := D_{3,1}$$

Vypočtení nové výchozí polohy

$$s_1 := s_1 + \Delta s_1$$
$$s_2 := s_2 + \Delta s_2$$
$$s_3 := s_3 + \Delta s_3$$

Pro kontrolu porovnání s již předem vypočtenými referenčními hodnotami

$$s_1 = 2.99974 \qquad q_1 = 3$$
$$s_2 = 0.6 \qquad q_2 = 0.6$$
$$s_3 = 0.79964 \qquad q_3 = 0.8$$

Při pohledu na vypočtené kloubové proměnné vidíme, že s_1 se liší o necelou tisícinu radiánu, s_2 je vypočtena přesně (je nastaveno zobrazování na 5 desetinných míst), s_3 se liší zhruba o 4 desetitisíciny mm. To by pro běžnou přesnost v robotice již stačilo. Pro ještě přesnější výpočet je provedena ještě další iterace.

Třetí iterace - výrazy jsou zkopírovány z předchozí iterace

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23} \qquad TV := T_{b3}$$

Je vypočtena transformační matice Tb3 ve výchozí poloze a je uložena jako matice TV, matice TD - žádaná poloha zústává konstantní

$$TV = \begin{pmatrix} -0.98996 & 0 & 0.14137 & 0.0487 \\ 0.14137 & 0 & 0.98996 & 0.8008 \\ 0 & 1 & 0 & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad TD = \begin{pmatrix} -0.98999 & 0 & 0.14112 & 0.04855 \\ 0.14112 & 0 & 0.98999 & 0.80117 \\ 0 & 1 & 0 & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotlivé parciální derivace do rozvoje transformační matice

$$U_{31} := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$U_{31} = \begin{pmatrix} -0.14137 & 0 & -0.98996 & -0.8008 \\ -0.98996 & 0 & 0.14137 & 0.0487 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{32} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot D_t \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$U_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U_{33} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot D_t \cdot A_{23}$$

$$U_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.14137 \\ 0 & 0 & 0 & 0.98996 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice koeficientů u proměnných

$$C := \begin{pmatrix} U31_{1,4} & U32_{1,4} & U33_{1,4} \\ U31_{2,4} & U32_{2,4} & U33_{2,4} \\ U31_{3,4} & U32_{3,4} & U33_{3,4} \end{pmatrix}$$

Inverze matice koeficientů

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1.238 & 0.1768 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.0609 & 1.00145 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice pravých stran

$$B := \begin{pmatrix} TD_{1,4} - TV_{1,4} \\ TD_{2,4} - TV_{2,4} \\ TD_{3,4} - TV_{3,4} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1.54831 \times 10^{-4} \\ 3.6615 \times 10^{-4} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy rovnic je matice D

$$D := C^{-1} \cdot B \qquad D = \begin{pmatrix} 2.56415 \times 10^{-4} \\ 0 \\ 3.5725 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

Krok, který je potřeba udělat z výchozí polohy směrem k řešení je tedy

$$\Delta s_1 := D_{1,1}$$
$$\Delta s_2 := D_{2,1}$$
$$\Delta s_3 := D_{3,1}$$

Vypočtení nové výchozí polohy

$$s_1 := s_1 + \Delta s_1$$

$$s_2 := s_2 + \Delta s_2$$

$$s_3 := s_3 + \Delta s_3$$

Pro kontrolu porovnání s již předem vypočtenými referenčními hodnotami

$s_1 = 3$ $\quad q_1 = 3$

$s_2 = 0.6$ $\quad q_2 = 0.6$

$s_3 = 0.8$ $\quad q_3 = 0.8$

Po třetí iteraci jsou již hodnoty hledaných kloubových proměnných vypočteny naprosto správně (zobrazení výsledku je nastaveno na pět desetinných míst), odpovídají referenčním hodnotám a výpočet může skončit.

Programování v prostř edí Mathcad

Výchozí poloha, pro kterou jsou v programu vyčísleny transformační matice

$s_1 := \pi \qquad s_2 := 0.8 \qquad s_3 := 0.9$

Žádaná poloha

$$TD = \begin{pmatrix} -0.98999 & 0 & 0.14112 & 0.04855 \\ 0.14112 & 0 & 0.98999 & 0.80117 \\ 0 & 1 & 0 & 1.154 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Program v Mathcadu definuje funkci inverze (ε), kde ε je požadovaná přesnost výpočtu - zde součet kro-ků

$$
\mathrm{inverze}(\varepsilon) := \left|
\begin{array}{l}
ds \leftarrow 100 \\
\text{while } \ ds > \varepsilon \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
A_{b0} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{01} \leftarrow \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{12} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{23} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
TV \leftarrow A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23} \\
U_1 \leftarrow A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23} \\
U_2 \leftarrow A_{b0} \cdot A_{01} \cdot D_t \cdot A_{12} \cdot A_{23} \\
U_3 \leftarrow A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot D_t \cdot A_{23} \\
C \leftarrow \begin{pmatrix} {U_1}_{1,4} & {U_2}_{1,4} & {U_3}_{1,4} \\ {U_1}_{2,4} & {U_2}_{2,4} & {U_3}_{2,4} \\ {U_1}_{3,4} & {U_2}_{3,4} & {U_3}_{3,4} \end{pmatrix} \\
B \leftarrow \begin{pmatrix} TD_{1,4} - TV_{1,4} \\ TD_{2,4} - TV_{2,4} \\ TD_{3,4} - TV_{3,4} \end{pmatrix} \\
D \leftarrow C^{-1} \cdot B \\
s_1 \leftarrow s_1 + D_{1,1} \\
s_2 \leftarrow s_2 + D_{2,1} \\
s_3 \leftarrow s_3 + D_{3,1} \\
ds \leftarrow \left|D_{1,1}\right| + \left|D_{2,1}\right| + \left|D_{3,1}\right|
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

Použití definované funkce pro vlastní výpočet

$$\text{inverze}(0.001) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

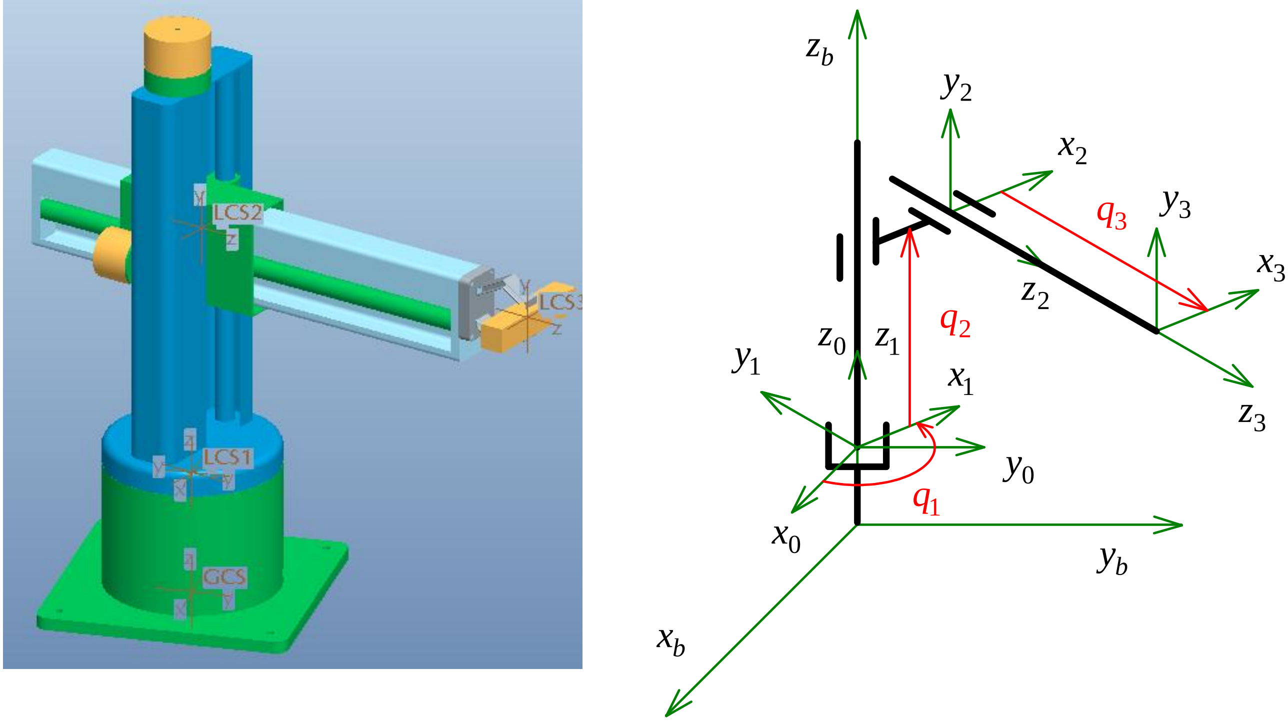
Příklad programování v prostředí Mathcad

$$a := \left| \begin{array}{l} b \leftarrow 2 \\ c \leftarrow 12 \\ i \leftarrow 0 \\ \text{while} \quad c > 3 \\ \quad \left| \begin{array}{l} c \leftarrow c - b \\ i \leftarrow i + 1 \end{array} \right. \\ \begin{pmatrix} c \\ i \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

10.4 Inverzní úloha kinematiky – inverze Jakobiho matice

Výpis příkladu s názvem *RTT_inv_uloha_transc_Jacob.xmcd*



Obr. 10-4 3D model a kinematické schéma vyšetřovaného mechanismu

Tabulka parametrů (Denavit-Hartenberg)

	theta	d	a	alfa
0	0	0.554	0	0
1	q1	0	0	0
2	0	q2	0.065	Pi/2
3	0	q3	0	0

ORIGIN := 1

Výchozí poloha

$a_x := -20$ $x_0 := 0.516642$ $v_{x0} := 0$ $s_1 := \pi - 0.6$

$a_y := 20$ $y_0 := 0.870291$ $v_{y0} := 0$ $s_2 := 0.9$

$a_z := 20$ $z_0 := 1.454$ $v_{z0} := 0$ $s_3 := 1.01$

$t := 0, 0.02 .. 0.2$

Parametry pohybu koncového bodu

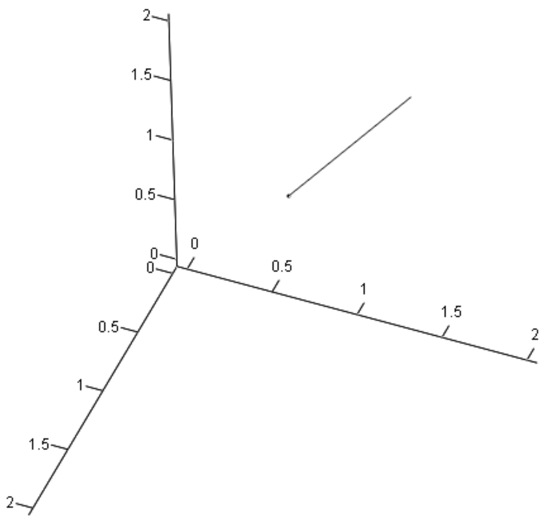
$$x(t) := x_0 + v_{x0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2$$

$$y(t) := y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2$$

Trajektorie koncového bodu ve 3D

$$z(t) := z_0 + v_{z0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_z \cdot t^2$$

$x(t) =$	$y(t) =$	$z(t) =$
0.516642	0.870291	1.454
0.512642	0.874291	1.458
0.500642	0.886291	1.47
0.480642	0.906291	1.49
0.452642	0.934291	1.518
0.416642	0.970291	1.554
0.372642	1.014291	1.598
0.320642	1.066291	1.65
0.260642	1.126291	1.71
0.192642	1.194291	1.778
0.116642	1.270291	1.854



(x, y, z)

Transformační matice mezi souřadnými systémy

Matice ve výchozí poloze

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b0} := A_{b0}$$

$$T_{b1} := A_{b0} \cdot A_{01}$$

$$T_{b2} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & 0 & \sin(s_1) & \sin(s_1) \cdot s_3 + 6.5 \cdot 10^{-2} \cdot \cos(s_1) \\ \sin(s_1) & 0 & -\cos(s_1) & -\cos(s_1) \cdot s_3 + 6.5 \cdot 10^{-2} \cdot \sin(s_1) \\ 0 & 1 & 0 & .554 + s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} = \begin{pmatrix} -0.8253356 & 0 & 0.5646425 & 0.5166421 \\ 0.5646425 & 0 & 0.8253356 & 0.8702907 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení soustavy transcendentních rovnic - nalezení referenčních průběhů kloubových proměnných q1, q2 a q3

Given

$$s_3 \cdot \sin(s_1) + 0.065 \cdot \cos(s_1) = x$$

$$0.065 \cdot \sin(s_1) - s_3 \cdot \cos(s_1) = y$$

$$s_2 + 0.554 = z$$

$$Q(x, y, z) := \mathrm{Find}(s_1, s_2, s_3) \qquad Q(0.5, 0.87, 1.454) = \begin{pmatrix} 2.5551521 \\ 0.9 \\ 1.0013366 \end{pmatrix}$$

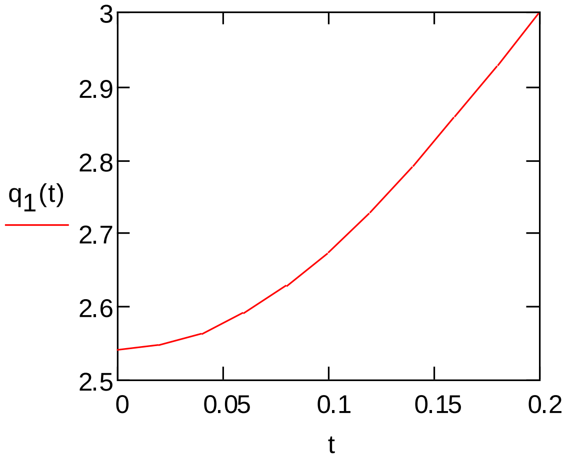
$$q_1(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{1,1}$$

$$q_2(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{2,1}$$

$$q_3(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{3,1}$$

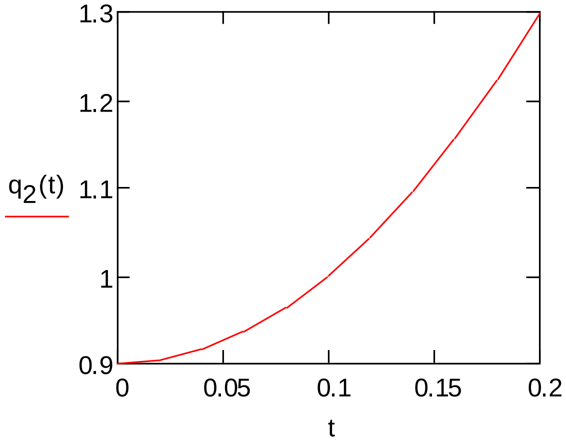
$q_1(t) =$

2.5415929
2.547091
2.5635029
2.5905648
2.6277893
2.6744077
2.7293196
2.7910767
2.8579243
2.9279108
2.9990493



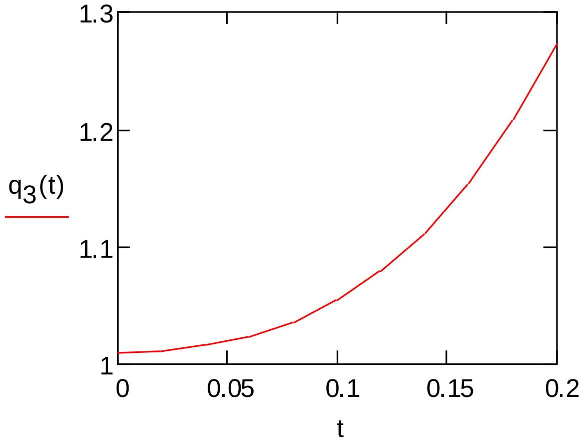
$q_2(t) =$

0.9
0.904
0.916
0.936
0.964
1
1.044
1.096
1.156
1.224
1.3



$q_3(t) =$

1.0100002
1.0114156
1.0158391
1.0237945
1.0361271
1.0539593
1.078621
1.1115587
1.1542273
1.2079805
1.2739779



Řešení pomocí Jacobiho matice

Výchozí poloha $t := 0$ $dt := 0.01$

$s_1 := \pi - 0.6$ $x(t) = 0.516642$

$s_2 := 0.9$ $y(t) = 0.870291$

$s_3 := 1.01$ $z(t) = 1.454$

$$\Delta x := x(t + dt) - x(t) \qquad \Delta x = -1 \times 10^{-3}$$
$$\Delta y := y(t + dt) - y(t) \qquad \Delta y = 1 \times 10^{-3}$$
$$\Delta z := z(t + dt) - z(t) \qquad \Delta z = 10 \times 10^{-4}$$

Všechny vektory je třeba vyjádřit v základním souřadném systému

Potřebné vektory ve výchozí poloze

$$k_0 := \text{submatrix}\left(T_{b0}, 1, 3, 3, 3\right) \qquad k_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k_1 := \text{submatrix}\left(T_{b1}, 1, 3, 3, 3\right) \qquad k_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k_2 := \text{submatrix}\left(T_{b2}, 1, 3, 3, 3\right) \qquad k_2 = \begin{pmatrix} 0.5646425 \\ 0.8253356 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{03} := \text{submatrix}\left(T_{b3} - T_{b0}, 1, 3, 4, 4\right) \qquad p_{03} = \begin{pmatrix} 0.5166421 \\ 0.8702907 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$p_{13} := \text{submatrix}\left(T_{b3} - T_{b1}, 1, 3, 4, 4\right) \qquad p_{13} = \begin{pmatrix} 0.5166421 \\ 0.8702907 \\ 0.9 \end{pmatrix}$$

$$p_{23} := \text{submatrix}\left(T_{b3} - T_{b2}, 1, 3, 4, 4\right) \qquad p_{23} = \begin{pmatrix} 0.5702889 \\ 0.833589 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matice výchozí polohy

$$TV := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23} \qquad TV = \begin{pmatrix} -0.8253356 & 0 & 0.5646425 & 0.5166421 \\ 0.5646425 & 0 & 0.8253356 & 0.8702907 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jakobiho matice ve výchozí poloze

$J := \left| k_0 \times p_{03} \quad k_1 \quad k_2 \right|$

Tento zápis je matematicky správný, ale v ptosředí Matcad neplatný. Mathcad nesprávně přiřadí hodnoty, do matice nelze zapsat vektor, popř. jinou matici. Je nutno vkládat přímo jednotlivé prvky!!!

$$J := \begin{bmatrix} \left(k_0 \times p_{03}\right)_{1,1} & {k_1}_{1,1} & {k_2}_{1,1} \\ \left(k_0 \times p_{03}\right)_{2,1} & {k_1}_{2,1} & {k_2}_{2,1} \\ \left(k_0 \times p_{03}\right)_{3,1} & {k_1}_{3,1} & {k_2}_{3,1} \end{bmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -0.8702907 & 0 & 0.5646425 \\ 0.5166421 & 0 & 0.8253356 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} -0.817164 & 0.559052 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5115268 & 0.861674 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta p := \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} \qquad \Delta p = \begin{pmatrix} -1 \times 10^{-3} \\ 1 \times 10^{-3} \\ 10 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$$\Delta s := J^{-1} \cdot \Delta p \qquad \Delta s = \begin{pmatrix} 1.3762159 \times 10^{-3} \\ 10 \times 10^{-4} \\ 3.5014718 \times 10^{-4} \end{pmatrix}$$

$s_1 := s_1 + \Delta s_{1,1}$

$s_2 := s_2 + \Delta s_{2,1}$

$s_3 := s_3 + \Delta s_{3,1}$

Žádaná hodnota na regulátory polohy

$s_1 = 2.5429689 \qquad q_1(0.01) = 2.5429687$

$s_2 = 0.901 \qquad q_2(0.01) = 0.901$

$s_3 = 1.0103501 \qquad q_3(0.01) = 1.0103513$

Další hodnota

$t := t + dt$

$s_1 = 2.5429689 \qquad x(t) = 0.515642$

$s_2 = 0.901$ $\quad y(t) = 0.871291$

$s_3 = 1.0103501$ $\quad z(t) = 1.455$

$\Delta x := x(t+dt) - x(t)$ $\quad \Delta x = -3 \times 10^{-3}$

$\Delta y := y(t+dt) - y(t)$ $\quad \Delta y = 3 \times 10^{-3}$

$\Delta z := z(t+dt) - z(t)$ $\quad \Delta z = 3 \times 10^{-3}$

Transformační matice mezi souřadnými systémy

Matice ve výchozí poloze

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$T_{b0} := A_{b0}$

$T_{b1} := A_{b0} \cdot A_{01}$

$T_{b2} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12}$

$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$

$$T_{b3} = \begin{pmatrix} -0.8253356 & 0 & 0.5646425 & 0.5166421 \\ 0.5646425 & 0 & 0.8253356 & 0.8702907 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Všechny vektory je třeba vyjádřit v základním souřadném systému

Potřebné vektory ve výchozí poloze

$k_0 := \mathrm{submatrix}(T_{b0}, 1, 3, 3, 3)$ $\qquad k_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k_1 := \mathrm{submatrix}(T_{b1}, 1, 3, 3, 3)$ $\qquad k_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k_2 := \text{submatrix}\left(T_{b2}, 1, 3, 3, 3\right)$ $\quad k_2 = \begin{pmatrix} 0.5635061 \\ 0.8261119 \\ 0 \end{pmatrix}$

$p_{03} := \text{submatrix}\left(T_{b3} - T_{b0}, 1, 3, 4, 4\right)$ $\quad p_{03} = \begin{pmatrix} 0.5156412 \\ 0.8712902 \\ 0.901 \end{pmatrix}$

$p_{13} := \text{submatrix}\left(T_{b3} - T_{b1}, 1, 3, 4, 4\right)$ $\quad p_{13} = \begin{pmatrix} 0.5156412 \\ 0.8712902 \\ 0.901 \end{pmatrix}$

$p_{23} := \text{submatrix}\left(T_{b3} - T_{b2}, 1, 3, 4, 4\right)$ $\quad p_{23} = \begin{pmatrix} 0.5693385 \\ 0.8346623 \\ 0 \end{pmatrix}$

Matice výchozí polohy

$TV := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$ $\quad TV = \begin{pmatrix} -0.8261119 & 0 & 0.5635061 & 0.5156412 \\ 0.5635061 & 0 & 0.8261119 & 0.8712902 \\ 0 & 1 & 0 & 1.455 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Jakobiho matice ve výchozí poloze

$$J := \begin{bmatrix} \left(k_0 \times p_{03}\right)_{1,1} & {k_1}_{1,1} & {k_2}_{1,1} \\ \left(k_0 \times p_{03}\right)_{2,1} & {k_1}_{2,1} & {k_2}_{2,1} \\ \left(k_0 \times p_{03}\right)_{3,1} & {k_1}_{3,1} & {k_2}_{3,1} \end{bmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} -0.8712902 & 0 & 0.5635061 \\ 0.5156412 & 0 & 0.8261119 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} -0.8176491 & 0.5577335 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.5103589 & 0.8623646 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta p := \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$ $\quad \Delta p = \begin{pmatrix} -3 \times 10^{-3} \\ 3 \times 10^{-3} \\ 3 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$

$\Delta s := J^{-1} \cdot \Delta p$ $\quad \Delta s = \begin{pmatrix} 4.1261478 \times 10^{-3} \\ 3 \times 10^{-3} \\ 1.056017 \times 10^{-3} \end{pmatrix}$

$s_1 := s_1 + \Delta s_{1,1}$

$s_2 := s_2 + \Delta s_{2,1}$

$s_3 := s_3 + \Delta s_{3,1}$

Žádaná hodnota na regulátory polohy - zde je vidět, že rychlost je větší a tedy i změna polohy koncového bodu za nastavený časový krok - výpočet již není tak přesný, ale vyhovuje.

$s_1 = 2.547095$ $\quad q_1(0.02) = 2.547091$

$s_2 = 0.904$ $\quad q_2(0.02) = 0.904$

$s_3 = 1.0114062$ $\quad q_3(0.02) = 1.0114156$

Obdobně by výpočet pokračoval dále, naprogramovaný v některém vhodném programovacím jazyce.

Program v prostředí Mathcad, zadána výchozí poloha koncového bodu a výchozí kloubové proměnné.

$x_0 := 0.516642$ $\quad q_1 := \pi - 0.6$

$y_0 := 0.870291$ $\quad q_2 := 0.9$

$z_0 := 1.454$ $\quad q_3 := 1.01$

Počáteční kloubové proměnné

$$sv := \begin{pmatrix} \pi - 0.6 \\ 0.9 \\ 1.01 \end{pmatrix}$$

Definice výpočtové funkce - argumenty této funkce jsou žádané hodnoty xd, yd a zd.
Pozor - indexy u kloubové proměnné jsou indexy vektoru ***s*** (vkládané levou hranatou závorkou), ne textové indexy (ty se vkládají pomocí tečky).

$$
Q(xd, yd, zd) :=
\begin{array}{|l}
x \leftarrow x_0 \\
y \leftarrow y_0 \\
z \leftarrow z_0 \\
s \leftarrow sv \\
i \leftarrow 0 \\
chyba \leftarrow 10 \\
\text{while } \; chyba > 0.0001 \\
\quad \begin{array}{|l}
dp \leftarrow \begin{pmatrix} xd - x \\ yd - y \\ zd - z \end{pmatrix} \\
A_{b0} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.554 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{01} \leftarrow \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{12} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.065 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A_{23} \leftarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
T_{b0} \leftarrow A_{b0} \\
T_{b1} \leftarrow A_{b0} \cdot A_{01} \\
T_{b2} \leftarrow A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \\
T_{b3} \leftarrow A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23} \\
k_0 \leftarrow \text{submatrix}(T_{b0}, 1, 3, 3, 3) \\
k_1 \leftarrow \text{submatrix}(T_{b1}, 1, 3, 3, 3) \\
k_2 \leftarrow \text{submatrix}(T_{b2}, 1, 3, 3, 3) \\
p_{03} \leftarrow \text{submatrix}(T_{b3} - T_{b0}, 1, 3, 4, 4) \\
p_{13} \leftarrow \text{submatrix}(T_{b3} - T_{b1}, 1, 3, 4, 4) \\
p_{23} \leftarrow \text{submatrix}(T_{b3} - T_{b2}, 1, 3, 4, 4) \\
J \leftarrow \begin{bmatrix} (k_0 \times p_{03})_{1,1} & {k_1}_{1,1} & {k_2}_{1,1} \\ (k_0 \times p_{03})_{2,1} & {k_1}_{2,1} & {k_2}_{2,1} \\ (k_0 \times p_{03})_{3,1} & {k_1}_{3,1} & {k_2}_{3,1} \end{bmatrix} \\
ds \leftarrow J^{-1} . dp \\
s \leftarrow s + ds \\
T_{b3} \leftarrow \begin{pmatrix} \cos(s_1) & 0 & \sin(s_1) & \sin(s_1) . s_3 + 6.5 \cdot 10^{-2} . \cos(s_1) \\ \sin(s_1) & 0 & -\cos(s_1) & -\cos(s_1) . s_3 + 6.5 \cdot 10^{-2} . \sin(s_1) \\ 0 & 1 & 0 & .554 + s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
x \leftarrow {T_{b3}}_{1,4} \\
y \leftarrow {T_{b3}}_{2,4} \\
z \leftarrow {T_{b3}}_{3,4} \\
chyba \leftarrow \sqrt{(xd - x)^2 + (yd - y)^2 + (zd - z)^2} \\
i \leftarrow i + 1
\end{array} \\
\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ i \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Použití programového výpočtu

$x_0 := 0.516642$ $\quad$ $xd := 0.550$

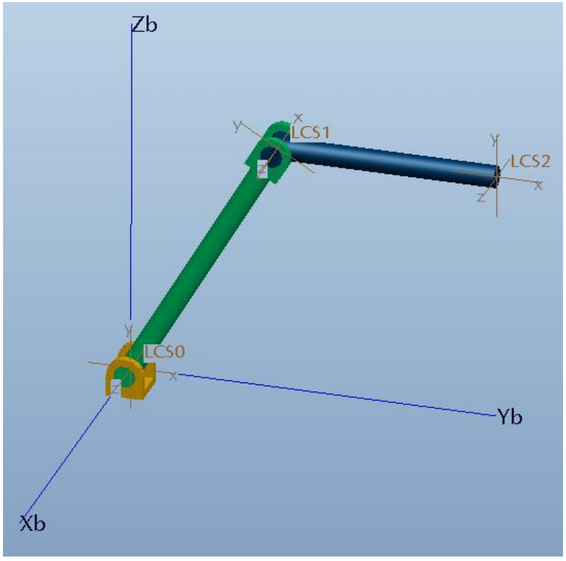
$y_0 := 0.870291$ $\quad$ $yd := 0.975$

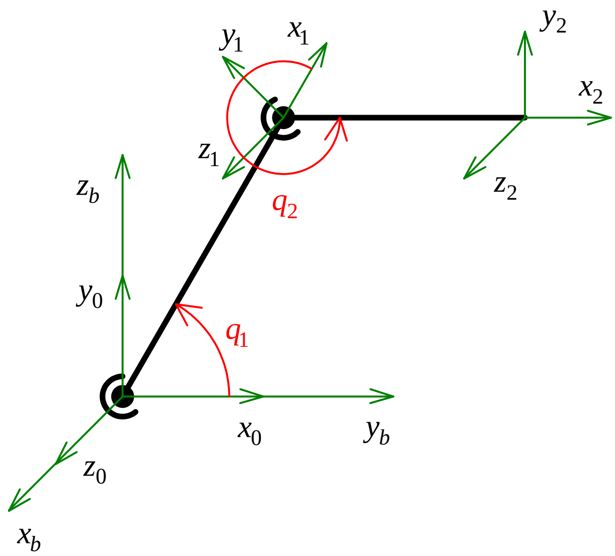
$z_0 := 1.454$ $\quad$ $zd := 1.660$

$$Q(xd, yd, zd) = \begin{pmatrix} 2.5698878 \\ 1.106 \\ 1.1175369 \\ 2 \end{pmatrix}$$

10.5 Výpočet chyby polohování pro mechanismus se dvěma stupni volnosti

Výpis příkladu s názvem *RR_deg.xmcd*





Obr. 10-5 3D model a kinematické schéma vyšetřovaného mechanismu

$ORIGIN := 1$

Tabulka parametrů (Denavit-Hartenberg)

	θ	d	a	α
0	$\pi/2$	0	0	$\pi/2$
1	q_1	0	l_1	0
2	q_2	0	l_2	0

Rozměry článků

$l_1 := 0.400$

$l_2 := 0.300$

Sestavení transformační matice A_{b0}

$\theta_0 := 90°$ $\quad d_0 := 0.0$ $\quad a_0 := 0.0$ $\quad \alpha_0 := 90°$

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_0) & -\sin(\theta_0)\cdot\cos(\alpha_0) & \sin(\theta_0)\cdot\sin(\alpha_0) & a_0\cdot\cos(\theta_0) \\ \sin(\theta_0) & \cos(\theta_0)\cdot\cos(\alpha_0) & -\cos(\theta_0)\cdot\sin(\alpha_0) & a_0\cdot\sin(\theta_0) \\ 0 & \sin(\alpha_0) & \cos(\alpha_0) & d_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zjednodušená matice Ab0

$$A_{b0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadání 1. zobecněné souřadnice (natočení)

$q_1 := 60°$

$\theta_1 := q_1 \qquad d_1 := 0.0 \qquad a_1 := l_1 \qquad \alpha_1 := 0.0°$

$\theta_1 = 1.047$

$$A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1)\cdot\cos(\alpha_1) & \sin(\theta_1)\cdot\sin(\alpha_1) & a_1\cdot\cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1)\cdot\cos(\alpha_1) & -\cos(\theta_1)\cdot\sin(\alpha_1) & a_1\cdot\sin(\theta_1) \\ 0 & \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{01} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 & 0.2 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 0.346 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zjednodušená matice A01

$$A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1\cdot\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1\cdot\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.866 & 0 & 0.2 \\ 0.866 & 0.5 & 0 & 0.346 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zadání 2. zobecněné souřadnice

$q_2 := 300°$

$\theta_2 := q_2 \qquad d_2 := 0.0 \qquad a_2 := l_2 \qquad \alpha_2 := 0.0°$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2)\cdot\cos(\alpha_2) & \sin(\theta_2)\cdot\sin(\alpha_2) & a_2\cdot\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2)\cdot\cos(\alpha_2) & -\cos(\theta_2)\cdot\sin(\alpha_2) & a_2\cdot\sin(\theta_2) \\ 0 & \sin(\alpha_2) & \cos(\alpha_2) & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 0.15 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & -0.26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zjednodušená matice A12

$$A_{12} := \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2\cdot\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\cdot\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.866 & 0 & 0.15 \\ -0.866 & 0.5 & 0 & -0.26 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Celková transformační matice

$$T_{b2} := A_{b0}\cdot A_{01}\cdot A_{12}$$

$$T_{b2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & l_1\cdot\cos(q_1) \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & l_1\cdot\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & l_2\cdot\cos(q_2) \\ \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & l_2\cdot\sin(q_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(q_1)\cdot\cos(q_2) - \sin(q_1)\cdot\sin(q_2) & -\cos(q_1)\cdot\sin(q_2) - \cos(q_2)\cdot\sin(q_1) & 0 & l_1\cdot\cos(q_1) + l_2\cdot\cos(q_1)\cdot\cos(q_2) - l_2\cdot\sin(q_1)\cdot\sin(q_2) \\ \cos(q_1)\cdot\sin(q_2) + \cos(q_2)\cdot\sin(q_1) & \cos(q_1)\cdot\cos(q_2) - \sin(q_1)\cdot\sin(q_2) & 0 & l_1\cdot\sin(q_1) + l_2\cdot\cos(q_1)\cdot\sin(q_2) + l_2\cdot\cos(q_2)\cdot\sin(q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0.346 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor do žádané polohy koncového bodu

$$p_{bd} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0.346 \end{pmatrix}$$

Vektor do obecné polohy koncového bodu

$$p_{bn}(q_1,q_2) := \begin{pmatrix} 0.0 \\ l_1\cdot\cos(q_1) + l_2\cdot\cos(q_1)\cdot\cos(q_2) - l_2\cdot\sin(q_1)\cdot\sin(q_2) \\ l_1\cdot\sin(q_1) + l_2\cdot\cos(q_1)\cdot\sin(q_2) + l_2\cdot\cos(q_2)\cdot\sin(q_1) \end{pmatrix}$$

Jednotkové vektory v žádané poloze koncového bodu

$$i_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad j_d := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad k_d := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jednotkové vektory v obecné poloze koncového bodu

$$i_n(q_1,q_2) := \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(q_1)\cdot\cos(q_2) - \sin(q_1)\cdot\sin(q_2) \\ \cos(q_1)\cdot\sin(q_2) + \cos(q_2)\cdot\sin(q_1) \end{pmatrix}$$

$$j_n(q_1,q_2) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(q_1)\cdot\sin(q_2) - \cos(q_2)\cdot\sin(q_1) \\ \cos(q_1)\cdot\cos(q_2) - \sin(q_1)\cdot\sin(q_2) \end{pmatrix}$$

$$k_n(q_1,q_2) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Chyba polohy

$$\mathrm{deltaP}(q_1,q_2) := \left\lfloor \left(p_{bd} - p_{bn}(q_1,q_2)\right)^T\cdot\left(p_{bd} - p_{bn}(q_1,q_2)\right) \right\rfloor$$

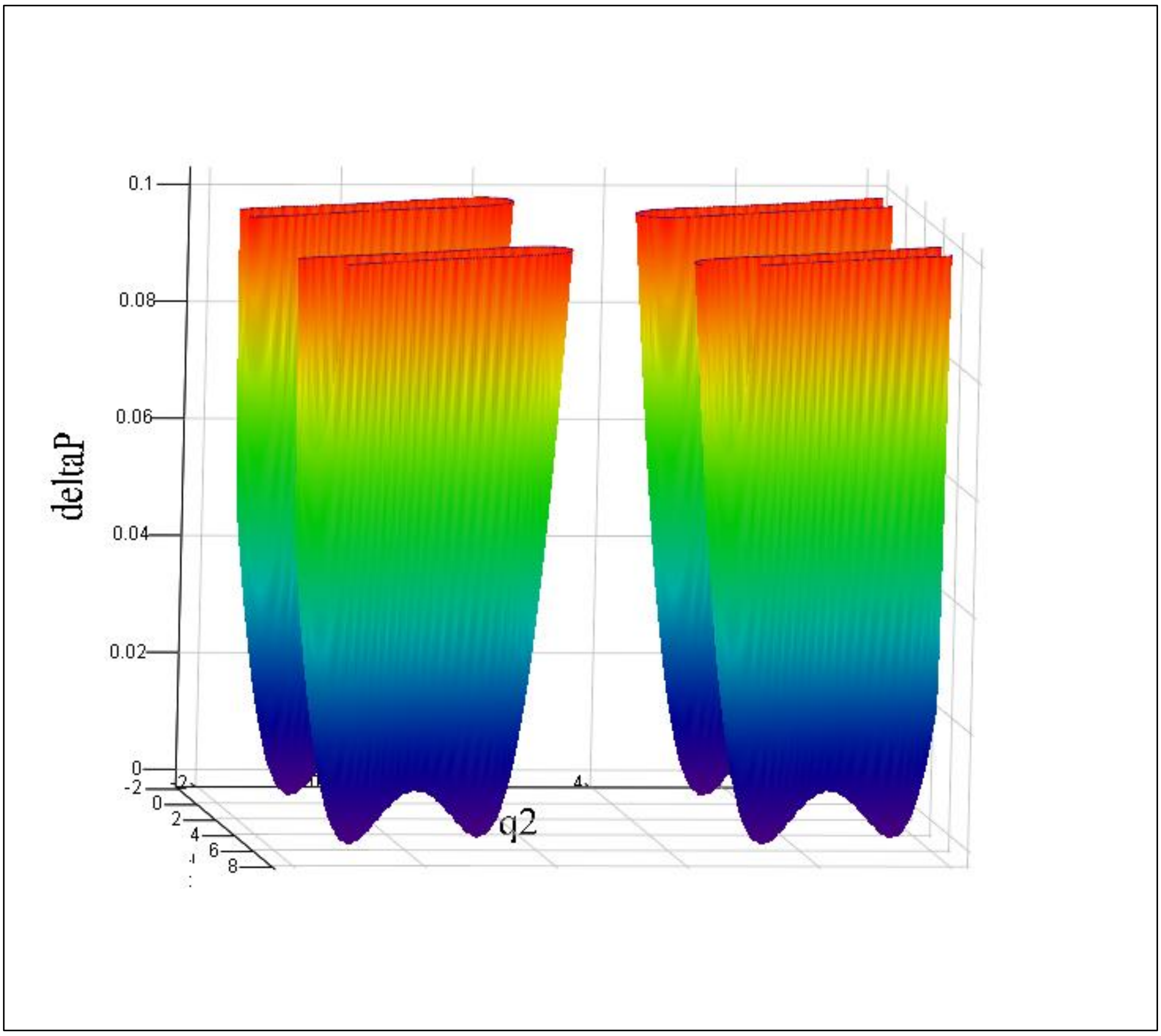
Chyba orientace

$$\mathrm{deltaO}(q_1,q_2) := \left[\left(i_d{}^T\cdot i_n(q_1,q_2) - 1\right)^2 + \left(j_d{}^T\cdot j_n(q_1,q_2) - 1\right)^2 + \left(k_d{}^T\cdot k_n(q_1,q_2) - 1\right)^2\right]$$

Chyba polohování

$$E(q_1,q_2) := \mathrm{deltaP}(q_1,q_2) + \mathrm{deltaO}(q_1,q_2)$$

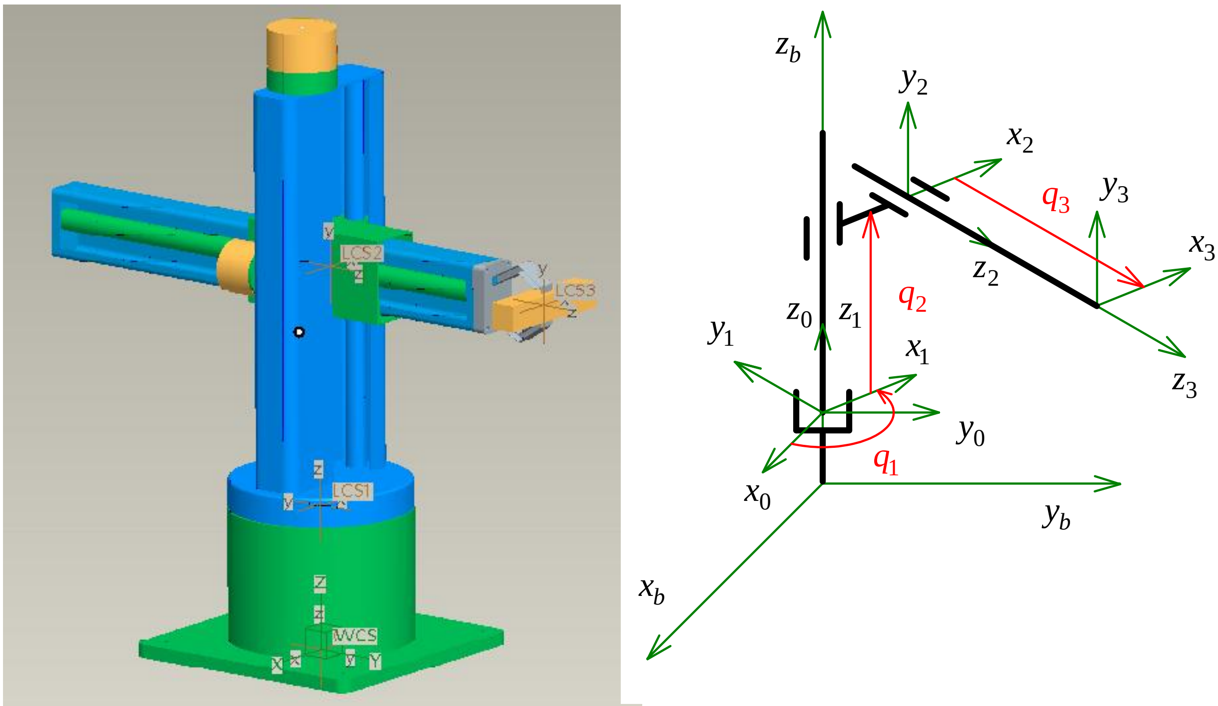
Zobrazení chyby polohy ve 3D



(deltaP)

10.6 Výpočet kinematických veličin pomocí Newton-Eulerových rekurentních vztahů

Výpis příkladu s názvem *rtt_model_objekt.xmcd*



Obr. 10-6 3D model a kinematické schéma vyšetřovaného mechanismu

Tabulka parametrů (Denavit-Hartenberg)

	theta	d	a	alfa
0	0	l0	0	0
1	q1	0	0	0
2	0	q2	l2	Pi/2
3	0	q3	0	0

$l_0 := 0.5$

$l_2 := 0.065$

$\text{ORIGIN} := 1 \qquad t := 0, 0.02 .. 0.2$ *rozsah času*

Parametry pohybu počátku LCS3 (na koncový bod nástroje je nutná další trans-formační matice)

zrychlení	*rychlost*	*počáteční poloha*
$a_x := -5.0$	$v_{x0} := 0$	$x_0 := -0.065$
$a_y := 5.0$	$v_{y0} := 0$	$y_0 := 1.01$
$a_z := 5.0$	$v_{z0} := 0$	$z_0 := 1.454$

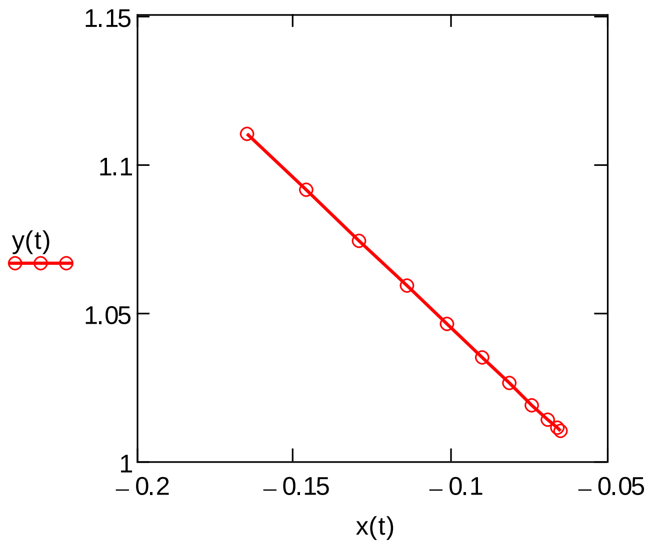
Rovnice pohybu počátku LCS3 - rovnoměrně zrychlený pohyb, trajektorii je vhodné řešit po částech s použitím poč áteční polohy a rychlosti z koncových hodnot předchozího segmentu trajektorie.

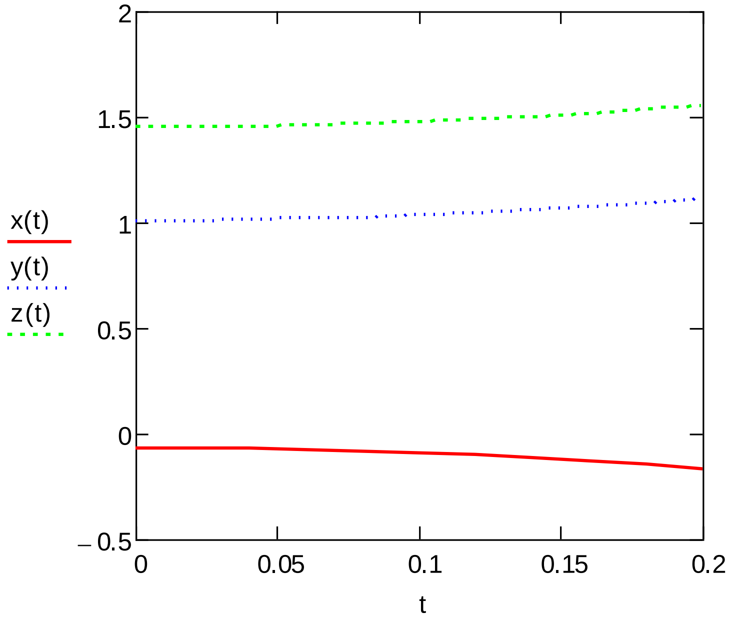
$$x(t) := x_0 + v_{x0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2$$

$$y(t) := y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2$$

$$z(t) := z_0 + v_{z0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_z \cdot t^2$$

x(t) =	y(t) =	z(t) =
-0.065	1.01	1.454
-0.066	1.011	1.455
-0.069	1.014	1.458
-0.074	1.019	1.463
-0.081	1.026	1.47
-0.09	1.035	1.479
-0.101	1.046	1.49
-0.114	1.059	1.503
-0.129	1.074	1.518
-0.146	1.091	1.535
-0.165	1.11	1.554





Výchozí hodnota kloubových proměnných odpovídající výchozí poloze konc. bodu nutná pro řešič inverzní úlohy (Given, Find).

$s_1 := \pi$

$s_2 := 0.954$

$s_3 := 1.01$

Transformační matice mezi souřadnými systémy ve výchozí poloze

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Celkové transformační matice

$T_{b0} := A_{b0}$

$T_{b1} := A_{b0} \cdot A_{01}$

$T_{b2} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12}$

$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$

Pro sestavení rovnic inverzní úlohy je celková transformační matice vyjádřena symbolickým vynásobením jednotlivých matic.

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & 0 & \sin(s_1) & \sin(s_1)\cdot s_3 + \cos(s_1)\cdot l_2 \\ \sin(s_1) & 0 & -\cos(s_1) & -\cos(s_1)\cdot s_3 + \sin(s_1)\cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{b3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní úloha pomocí řešení soustavy transcendentních rovnic

Given

$$s_3 \cdot \sin(s_1) + l_2 \cdot \cos(s_1) = x$$

$$l_2 \cdot \sin(s_1) - s_3 \cdot \cos(s_1) = y$$

$$s_2 + l_0 = z$$

$$Q(x,y,z) := \mathrm{Find}(s_1, s_2, s_3)$$

$$q_1(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{1,1}$$

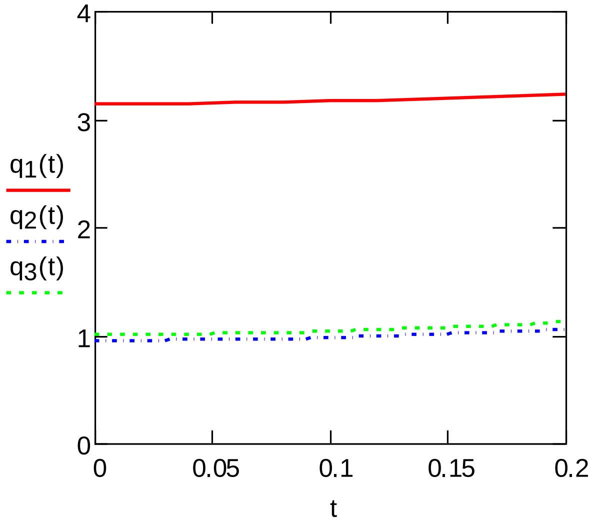
$$q_2(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{2,1}$$

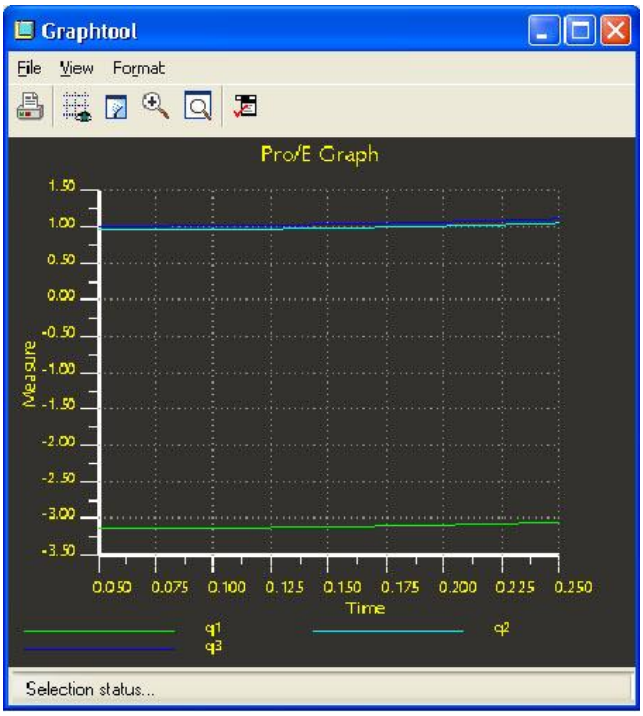
$$q_3(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{3,1}$$

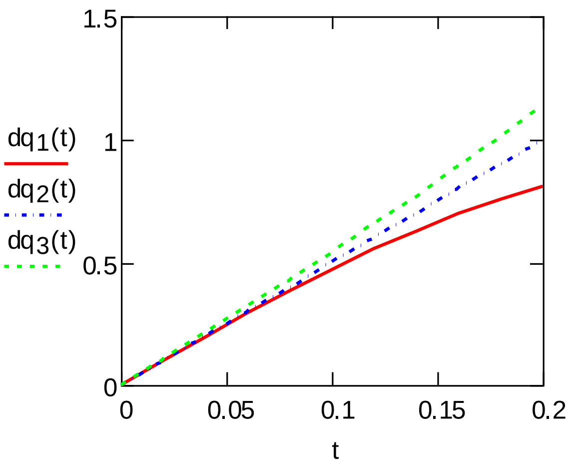
Výpočet rychlosti a zrychlení jednotlivých kloubových proměnných

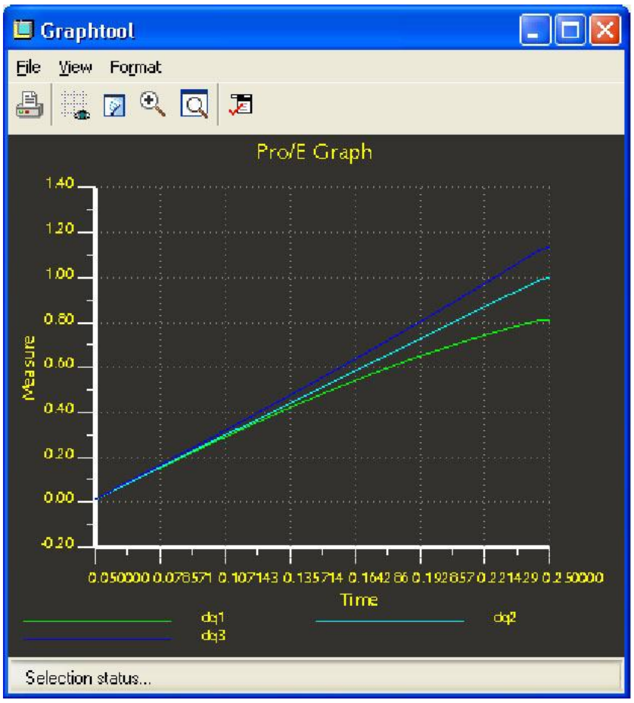
$$dq_1(t) := \frac{d}{dt}q_1(t) \qquad dq_2(t) := \frac{d}{dt}q_2(t) \qquad dq_3(t) := \frac{d}{dt}q_3(t)$$ *rychlosti*

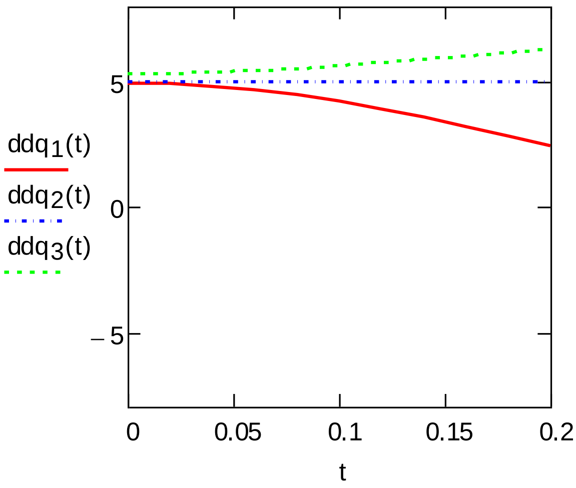
$$ddq_1(t) := \frac{d}{dt}dq_1(t) \qquad ddq_2(t) := \frac{d}{dt}dq_2(t) \qquad ddq_3(t) := \frac{d}{dt}dq_3(t)$$ *zrychlení*

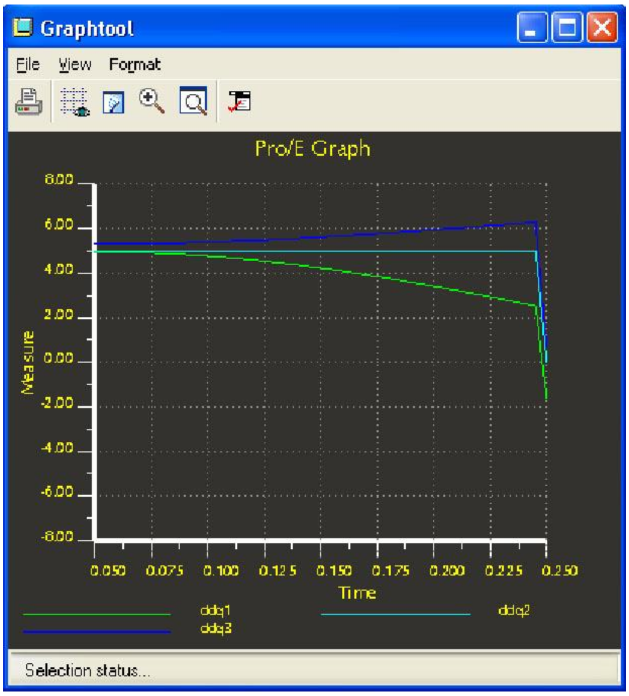



Graphtool
File View Format
Pro/E Graph
1.50
1.00
0.50
0.00
-0.50
-1.00
-1.50
-2.00
-2.50
-3.00
-3.50
Measure
0.050 0.075 0.100 0.125 0.150 0.175 0.200 0.225 0.250
Time
q1
q2
q3
Selection status...


1.5
1
0.5
0
dq1(t)
dq2(t)
dq3(t)
0 0.05 0.1 0.15 0.2
t


Graphtool
File View Format
Pro/E Graph
1.40
1.20
1.00
0.80
0.60
0.40
0.20
0.00
-0.20
Measure
0.050000 0.078571 0.107143 0.135714 0.164286 0.192857 0.221429 0.250000
Time
dq1
dq2
dq3
Selection status...





Transformační matice mezi souřadnými systémy

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{01}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{23}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{b1}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) \cdot l_2 \\ \sin(q_1(t)) & 0 & -\cos(q_1(t)) & \sin(q_1(t)) \cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{b2}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) & \sin(q_1(t)) \cdot q_3(t) + \cos(q_1(t)) \cdot l_2 \\ \sin(q_1(t)) & 0 & -\cos(q_1(t)) & -\cos(q_1(t)) \cdot q_3(t) + \sin(q_1(t)) \cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrola správnosti sestavení transformačních matic s průběhem koncového bodu (poč. LCS3)

$T_{b3}(t)_{1,4} =$	$x(t) =$	$T_{b3}(t)_{2,4} =$	$y(t) =$	$T_{b3}(t)_{3,4} =$	$z(t) =$
-0.065	-0.065	1.01	1.01	1.454	1.454
-0.066	-0.066	1.011	1.011	1.455	1.455
-0.069	-0.069	1.014	1.014	1.458	1.458
-0.074	-0.074	1.019	1.019	1.463	1.463
-0.081	-0.081	1.026	1.026	1.47	1.47
-0.09	-0.09	1.035	1.035	1.479	1.479
-0.101	-0.101	1.046	1.046	1.49	1.49
-0.114	-0.114	1.059	1.059	1.503	1.503
-0.129	-0.129	1.074	1.074	1.518	1.518
-0.146	-0.146	1.091	1.091	1.535	1.535
-0.165	-0.165	1.11	1.11	1.554	1.554

Výpočet dalších kinematických veličin

vektory na osách z

$k_0(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b0}, 1, 3, 3, 3)$

$k_0(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad k_0(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k_1(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b1}(t), 1, 3, 3, 3)$

$k_1(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad k_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k_2(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b2}(t), 1, 3, 3, 3)$

$k_2(t) := \begin{pmatrix} \sin(q_1(t)) \\ -\cos(q_1(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$

$k_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$k_3(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b3}(t), 1, 3, 3, 3)$

$k_3(t) := \begin{pmatrix} \sin(q_1(t)) \\ -\cos(q_1(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$

$k_3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Submatice rotace

$R_{b0} := \mathrm{submatrix}(T_{b0}, 1, 3, 1, 3)$

$R_{b1}(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b1}(t), 1, 3, 1, 3)$

$R_{b2}(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b2}(t), 1, 3, 1, 3)$

$R_{b3}(t) := \mathrm{submatrix}(T_{b3}(t), 1, 3, 1, 3)$

Vzájemná (relativní) úhlová rychlost

$\omega_0(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \omega_{01}(t) := k_0(t) \cdot dq_1(t)$ $\quad \omega_{12}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \omega_{23}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\omega_1(t) := \omega_0(t) + \omega_{01}(t)$ *(v zákl. ss.)*

$\omega_2(t) := \omega_1(t) + \omega_{12}(t)$ *(v zákl. ss.)*

$\omega_3(t) := \omega_2(t) + \omega_{23}(t)$ *(v zákl. ss.)*

vektory mezi počátky ss

$$p_{01}(t) := R_{b0} \cdot \text{submatrix}\left(A_{01}(t), 1, 3, 4, 4\right)$$

$$p_{01}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{12}(t) := R_{b1}(t) \cdot \text{submatrix}\left(A_{12}(t), 1, 3, 4, 4\right)$$

$$p_{12}(0) = \begin{pmatrix} -0.065 \\ 0 \\ 0.954 \end{pmatrix}$$

$$p_{23}(t) := R_{b2}(t) \cdot \text{submatrix}\left(A_{23}(t), 1, 3, 4, 4\right)$$

$$p_{23}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{01}(t) := \text{submatrix}\left(T_{b1}(t) - T_{b0}, 1, 3, 4, 4\right)$$

$$p_{01}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ *v zákl. ss.* $$p_{01}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$p_{12}(t) := \text{submatrix}\left(T_{b2}(t) - T_{b1}(t), 1, 3, 4, 4\right)$$

$$p_{12}(t) := \begin{pmatrix} \cos\left(q_1(t)\right) \cdot 0.065 \\ \sin\left(q_1(t)\right) \cdot 0.065 \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$ *v zákl. ss.* $$p_{12}(0) = \begin{pmatrix} -0.065 \\ 0 \\ 0.954 \end{pmatrix}$$

$$p_{23}(t) := \text{submatrix}\left(T_{b3}(t) - T_{b2}(t), 1, 3, 4, 4\right)$$

$$p_{23}(t) := \begin{pmatrix} \sin\left(q_1(t)\right) \cdot q_3(t) \\ -\cos\left(q_1(t)\right) \cdot q_3(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$ *v zákl. ss.* $$p_{23}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vektor do koncového bodu

$$p_{03}(t) := \text{submatrix}\left(T_{b3}(t) - T_{b0}, 1, 3, 4, 4\right)$$

Rychlost č lánku 0 - podstavce

$$v_0(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vzájemné rychlosti - ručně zjednodušené

$$v_{01}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{12}(t) := k_1(t) \cdot dq_2(t) \qquad v_{23}(t) := k_2(t) \cdot dq_3(t)$$

$$v_{01}(0.1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_{12}(0.1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad v_{23}(0.1) = \begin{pmatrix} -0.013 \\ 0.542 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vzájemné rychlosti univerzální obecný tvar - vystupuje zde parciální derivace vektoru ***p*** *podle kloubové proměnné q - pomocí diferenciálních operátorů*

$$D_r := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_t := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{01}(t) := \mathrm{submatrix}\left(A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t), 1, 3, 4, 4\right) \cdot dq_1(t)$$

$$v_{01}(0.1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{12}(t) := \mathrm{submatrix}\left(A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t), 1, 3, 4, 4\right) \cdot dq_2(t)$$

$$v_{12}(0.1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$v_{23}(t) := \mathrm{submatrix}\left(A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot A_{23}(t), 1, 3, 4, 4\right) \cdot dq_3(t)$$

$$v_{23}(0.1) = \begin{pmatrix} -0.013 \\ 0.542 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{23}(t) := R_{b2}(t) \cdot \mathrm{submatrix}\left(D_t \cdot A_{23}(t), 1, 3, 4, 4\right) \cdot dq_3(t)$$

Alternativně nejprve derivace vektoru p23 v lokálním souřadném systému, výsledkem je vektor rychlosti v lokálním ss., ten se vyjádří v základním ss. jen násobením submaticí rotace.

$$v_{23}(0.1) = \begin{pmatrix} -0.013 \\ 0.542 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Výpočet translačních rychlostí počátků lokálních ss. - vše vyjádřeno v souřadnicích základního ss.

$$v_1(t) := v_0(t) + v_{01}(t) + \omega_0(t) \times p_{01}(t)$$

$$v_2(t) := v_1(t) + v_{12}(t) + \omega_1(t) \times p_{12}(t)$$

$$v_3(t) := v_2(t) + v_{23}(t) + \omega_2(t) \times p_{23}(t)$$

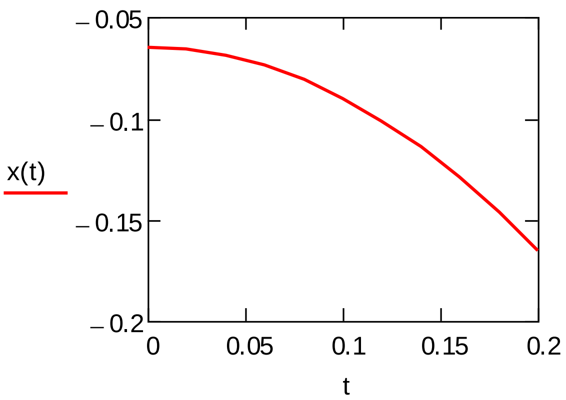
Kontrola integrací rychlosti koncového bodu (poč. LCS3)

$$x_0 + \int_0^t v_3(t)_{1,1}\,dt$$

-0.065
-0.066
-0.069
-0.074
-0.081
-0.09
-0.101
-0.114
-0.129
-0.146
-0.165

$x(t) =$

-0.065
-0.066
-0.069
-0.074
-0.081
-0.09
-0.101
-0.114
-0.129
-0.146
-0.165

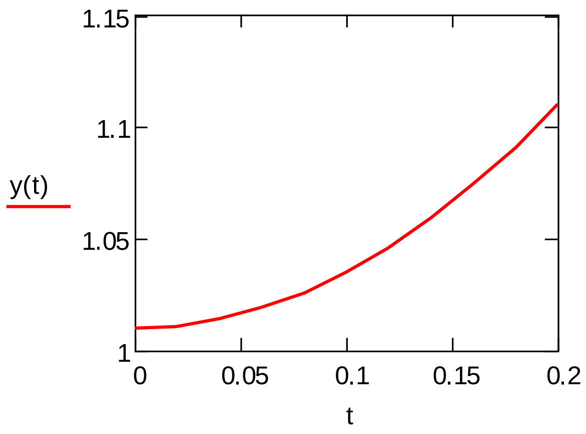


$$y_0 + \int_0^t v_3(t)_{2,1}\,dt$$

1.01
1.011
1.014
1.019
1.026
1.035
1.046
1.059
1.074
1.091
1.11

$y(t) =$

1.01
1.011
1.014
1.019
1.026
1.035
1.046
1.059
1.074
1.091
1.11

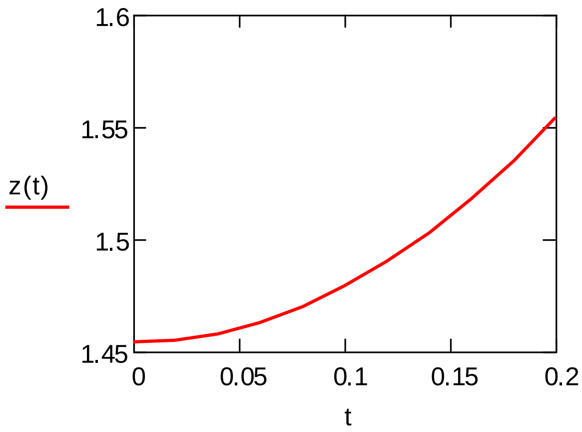


$$z_0 + \int_0^t v_3(t)_{3,1}\, dt$$

1.454
1.455
1.458
1.463
1.47
1.479
1.49
1.503
1.518
1.535
1.554

$$z(t) =$$

1.454
1.455
1.458
1.463
1.47
1.479
1.49
1.503
1.518
1.535
1.554



Výpočet relativních úhlových zrychlení článků

$$\varepsilon_0(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_{01}(t) := k_0(t) \cdot ddq_1(t) \qquad \varepsilon_{12}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_{23}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1(t) := \varepsilon_0(t) + \varepsilon_{01}(t) + \omega_0(t) \times \omega_{01}(t)$$

$$\varepsilon_2(t) := \varepsilon_1(t) + \varepsilon_{12}(t) + \omega_1(t) \times \omega_{12}(t)$$

$$\varepsilon_3(t) := \varepsilon_2(t) + \varepsilon_{23}(t) + \omega_2(t) \times \omega_{23}(t)$$

Výpočet relativních translačních zrychlení počátků lokálních souřadných systémů

$$a_0(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ *translační zrychlení počátku lokálního ss. podstavce*

$$a_{01}(t) := \varepsilon_{01}(t) \times p_{01}(t) + \omega_{01}(t) \times \left(\omega_{01}(t) \times p_{01}(t)\right)$$ *Pro rotační*

$$a_{12}(t) := k_1(t) \cdot ddq_2(t) \qquad a_{12}(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ddq_2(t) \end{pmatrix}$$ *translační*

$$a_{23}(t) := k_2(t) \cdot ddq_3(t) \qquad a_{23}(t) := \begin{pmatrix} \sin(q_1(t)) \cdot ddq_3(t) \\ -\cos(q_1(t)) \cdot ddq_3(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

translační

Výpočet translačních zrychlení počátků lokálních souřadných systémů

$$a_1(t) := a_0(t) + a_{01}(t) + \varepsilon_0(t) \times p_{01}(t) + 2 \cdot (\omega_0(t) \times v_{01}(t)) + \omega_0(t) \times (\omega_0(t) \times p_{01}(t))$$

$$a_2(t) := a_1(t) + a_{12}(t) + \varepsilon_1(t) \times p_{12}(t) + 2 \cdot (\omega_1(t) \times v_{12}(t)) + \omega_1(t) \times (\omega_1(t) \times p_{12}(t))$$

$$a_3(t) := a_2(t) + a_{23}(t) + \varepsilon_2(t) \times p_{23}(t) + 2 \cdot (\omega_2(t) \times v_{23}(t)) + \omega_2(t) \times (\omega_2(t) \times p_{23}(t))$$

Kontrola zrychlení - odpovídá zadání ax, ay a az - definice pohybu konového bodu na začát-ku výpočtu

$$a_3(0) = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$t =$	$a_3(t)_{1,1}$	$a_3(t)_{2,1}$	$a_3(t)_{3,1}$
0	-5	5	5
0.02	-5	5	5
0.04	-5	5	5
0.06	-5	5	5
0.08	-5	5	5
0.1	-5	5	5
0.12	-5	5	5
0.14	-5	5	5
0.16	-5	5	5
0.18	-5	5	5
0.2	-5	5	5

Tento úkon kontroly je velmi důležitý, pohyb koncového bodu byl řešením inverzní úlohy rozložen do jednotlivých kloubů, byly vypočteny průběhy rychlostí a zrychlení (translační i rotační) a ve zrychlení a3 se všechny veličiny skládají. Pokud tato veličina je shodná se zadáním, je jistota správnosti výpočtu až po toto místo řešení.

Poloha težišť článků mechanismu zjištěná analýzou 3D modelu v Pro/E

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS1 coordinate frame:
X Y Z -4.0325987e-02 -1.8024766e-06 7.3574162e-01 M

$$x_{t11} := -4.0325987 \cdot 10^{-2}$$

$$y_{t11} := -1.8024766 \cdot 10^{-6}$$

$$z_{t11} := 7.3574162 \cdot 10^{-1}$$

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS2 coordinate frame:
X Y Z -7.2368752e-02 0.0000000e+00 -4.7439674e-02 M

$$x_{t22} := -7.2368752 \cdot 10^{-2}$$
$$y_{t22} := 0.0000000$$
$$z_{t22} := -4.7439674 \cdot 10^{-2}$$

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS3 coordinate frame:
X Y Z 2.5740416e-03 0.0000000e+00 -3.7039760e-01 M

$$x_{t33} := 2.5740416 \cdot 10^{-3}$$
$$y_{t33} := 0.0000000000$$
$$z_{t33} := -3.7039760 \cdot 10^{-1}$$

vektory do těžiště v lokálních ss

$$p_{t11} := \begin{pmatrix} x_{t11} \\ y_{t11} \\ z_{t11} \end{pmatrix} \qquad p_{t22} := \begin{pmatrix} x_{t22} \\ y_{t22} \\ z_{t22} \end{pmatrix} \qquad p_{t33} := \begin{pmatrix} x_{t33} \\ y_{t33} \\ z_{t33} \end{pmatrix}$$

je nutno přepočítat do základního ss

$$p_{t1b}(t) := R_{b1}(t) \cdot p_{t11}$$
$$p_{t2b}(t) := R_{b2}(t) \cdot p_{t22}$$
$$p_{t3b}(t) := R_{b3}(t) \cdot p_{t33}$$

$$P_{t11} := \begin{pmatrix} x_{t11} \\ y_{t11} \\ z_{t11} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{t1b}(t) := T_{b1}(t) \cdot P_{t11} \qquad P_{t1b}(0) = \begin{pmatrix} 0.04 \\ 1.802 \times 10^{-6} \\ 1.236 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{t22} := \begin{pmatrix} x_{t22} \\ y_{t22} \\ z_{t22} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{t2b}(t) := T_{b2}(t) \cdot P_{t22} \qquad P_{t2b}(0) = \begin{pmatrix} 7.369 \times 10^{-3} \\ -0.047 \\ 1.454 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{t33} := \begin{pmatrix} x_{t33} \\ y_{t33} \\ z_{t33} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{t3b}(t) := T_{b3}(t) \cdot P_{t33} \qquad P_{t3b}(0.0) = \begin{pmatrix} -0.068 \\ 0.64 \\ 1.454 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Výpočet rychlosti a zrychlení těžišť - vše v základním ss

$$v_{t1}(t) := v_1(t) + \omega_1(t) \times p_{t1b}(t)$$

$$v_{t2}(t) := v_2(t) + \omega_2(t) \times p_{t2b}(t)$$

$$v_{t3}(t) := v_3(t) + \omega_3(t) \times p_{t3b}(t) \qquad v_{t3}(0.1) = \begin{pmatrix} -0.326 \\ 0.503 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$a_{t1}(t) := a_1(t) + \varepsilon_1(t) \times p_{t1b}(t) + \omega_1(t) \times \left(\omega_1(t) \times p_{t1b}(t)\right)$$

$$a_{t2}(t) := a_2(t) + \varepsilon_2(t) \times p_{t2b}(t) + \omega_2(t) \times \left(\omega_2(t) \times p_{t2b}(t)\right)$$

$$a_{t3}(t) := a_3(t) + \varepsilon_3(t) \times p_{t3b}(t) + \omega_3(t) \times \left(\omega_3(t) \times p_{t3b}(t)\right) \qquad a_{t3}(0.0) = \begin{pmatrix} -3.166 \\ 4.987 \\ 5 \end{pmatrix}$$

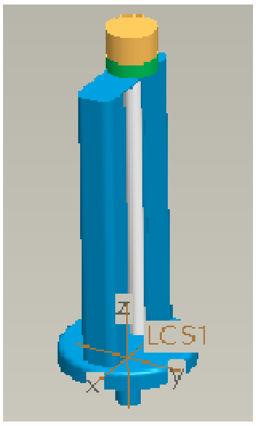
Ověření výpočtu rychlosti koncového bodu pomocí Jakobiho matice

Kontrola s Pro/E OK

$$J_p(t) := \begin{bmatrix} \left(k_0(t) \times p_{03}(t)\right)_{1,1} & k_1(t)_{1,1} & k_2(t)_{1,1} \\ \left(k_0(t) \times p_{03}(t)\right)_{2,1} & k_1(t)_{2,1} & k_2(t)_{2,1} \\ \left(k_0(t) \times p_{03}(t)\right)_{3,1} & k_1(t)_{3,1} & k_2(t)_{3,1} \end{bmatrix} \qquad J_p(0) = \begin{pmatrix} -1.01 & 0 & 0 \\ -0.065 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$dw(t) := J_p(t) \cdot \begin{pmatrix} dq_1(t) \\ dq_2(t) \\ dq_3(t) \end{pmatrix} \qquad dw(0.1) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad v_3(0.1) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

Newton-Eulerovy vztahy - výpočet silového působení



MASS = 4.8824683e+01 KILOGRAM

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS1 coordinate frame:
X Y Z -4.0325987e-02 -1.8024766e-06 7.3574162e-01 M

*INERTIA with respect to LCS1 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 4.6443693e+01 -7.9670815e-06 2.0478701e+00
Iyx Iyy Iyz -7.9670815e-06 4.7356949e+01 1.4573962e-04
Izx Izy Izz 2.0478701e+00 1.4573962e-04 1.4139746e+00

*INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to LCS1 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 2.0014124e+01 -4.4181788e-06 5.9926583e-01
Iyx Iyy Iyz -4.4181788e-06 2.0847982e+01 8.0990420e-05
Izx Izy Izz 5.9926583e-01 8.0990420e-05 1.3345766e+00

Článek ROT1 - matice setrvačnosti k těžišti, vyjádřeno (orientace) podle LCS1

$$m_1 := 48.8246830000$$

$$J_{x1t} := 2.0014124 \cdot 10^{1}$$

$$J_{xy1t} := -4.4181788 \cdot 10^{-6} \qquad J_{y1t} := 2.0847982 \cdot 10^{1}$$

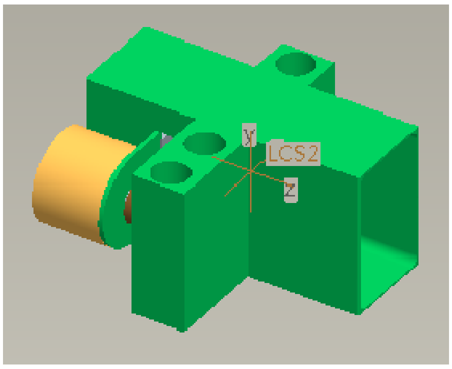
$$J_{xz1t} := 5.9926583 \cdot 10^{-1} \qquad J_{yz1t} := 8.0990420 \cdot 10^{-5} \qquad J_{z1t} := 1.3345766$$

$$J_{11} := \begin{pmatrix} J_{x1t} & -J_{xy1t} & -J_{xz1t} \\ -J_{xy1t} & J_{y1t} & -J_{yz1t} \\ -J_{xz1t} & -J_{yz1t} & J_{z1t} \end{pmatrix}$$

$$J_{11} = \begin{pmatrix} 20.014 & 4.418 \times 10^{-6} & -0.599 \\ 4.418 \times 10^{-6} & 20.848 & -8.099 \times 10^{-5} \\ -0.599 & -8.099 \times 10^{-5} & 1.335 \end{pmatrix}$$

Matice setrvačnosti přepočtená do základního ss GCS

$$J_1(t) := R_{b1}(t) \cdot J_{11} \cdot R_{b1}(t)^T \qquad J_1(0) = \begin{pmatrix} 20.014 & 4.418 \times 10^{-6} & 0.599 \\ 4.418 \times 10^{-6} & 20.848 & 8.099 \times 10^{-5} \\ 0.599 & 8.099 \times 10^{-5} & 1.335 \end{pmatrix}$$



TRAN2

MASS = 4.2894906e+01 KILOGRAM

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS2 coordinate frame:
X Y Z -7.2368752e-02 0.0000000e+00 -4.7439674e-02 M

*INERTIA with respect to LCS2 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 1.0344896e+00 0.0000000e+00 -1.2186605e-01
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 1.7935719e+00 0.0000000e+00
Izx Izy Izz -1.2186605e-01 0.0000000e+00 1.4614205e+00

*INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to LCS2 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 9.3795366e-01 0.0000000e+00 2.5398594e-02
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 1.4723852e+00 0.0000000e+00
Izx Izy Izz 2.5398594e-02 0.0000000e+00 1.2367697e+00

Článek TRAN2 - matice setrvačnosti k těžišti, vyjádřeno (orientace) podle LCS2

$$m_2 := 4.2894906 \cdot 10^{1}$$

$$J_{x2t} := 9.3795366 \cdot 10^{-1}$$

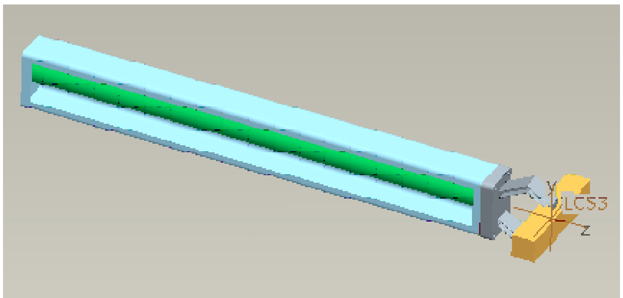
$$J_{xy2t} := 0.0000000 \qquad J_{y2t} := 1.4723852$$

$$J_{xz2t} := 2.5398594 \cdot 10^{-2} \qquad J_{yz2t} := 0.0000000 \qquad J_{z2t} := 1.2367697$$

$$J_{22} := \begin{pmatrix} J_{x2t} & -J_{xy2t} & -J_{xz2t} \\ -J_{xy2t} & J_{y2t} & -J_{yz2t} \\ -J_{xz2t} & -J_{yz2t} & J_{z2t} \end{pmatrix} \qquad J_{22} = \begin{pmatrix} 0.938 & 0 & -0.025 \\ 0 & 1.472 & 0 \\ -0.025 & 0 & 1.237 \end{pmatrix}$$

Matice setrvačnosti přepočtená do základního GCS

$$J_2(t) := R_{b2}(t) \cdot J_{22} \cdot R_{b2}(t)^T \qquad J_2(0) = \begin{pmatrix} 0.938 & 0.025 & 0 \\ 0.025 & 1.237 & 0 \\ 0 & 0 & 1.472 \end{pmatrix}$$



TRAN3

MASS = 5.9261161e+01 KILOGRAM

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS3 coordinate frame:
X Y Z 2.5740416e-03 0.0000000e+00 -3.7039760e-01 M

*INERTIA with respect to LCS3 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 3.3435680e+01 0.0000000e+00 1.9296398e-01
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 3.4142950e+01 0.0000000e+00
Izx Izy Izz 1.9296398e-01 0.0000000e+00 1.0075258e+00

*INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to LCS3 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 2.5305381e+01 0.0000000e+00 1.3646327e-01
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 2.6012259e+01 0.0000000e+00
Izx Izy Izz 1.3646327e-01 0.0000000e+00 1.0071331e+00

Článek TRAN3 - matice setrvačnosti k těžišti, vyjádřeno (orientace) podle LCS3

$m_3 := 5.9261161 \cdot 10^1$

$J_{x3t} := 2.5305381 \cdot 10^1$

$J_{xy3t} := 0.0000000 \qquad J_{y3t} := 2.6012259 \cdot 10^1$

$J_{xz3t} := 1.3646327 \cdot 10^{-1} \qquad J_{yz3t} := 0.0000000 \qquad J_{z3t} := 1.0071331$

$$J_{33} := \begin{pmatrix} J_{x3t} & -J_{xy3t} & -J_{xz3t} \\ -J_{xy3t} & J_{y3t} & -J_{yz3t} \\ -J_{xz3t} & -J_{yz3t} & J_{z3t} \end{pmatrix} \qquad J_{33} = \begin{pmatrix} 25.305 & 0 & -0.136 \\ 0 & 26.012 & 0 \\ -0.136 & 0 & 1.007 \end{pmatrix}$$

Matice setrvačnosti přepočtená do základního GCS

$$J_3(t) := R_{b3}(t) \cdot J_{33} \cdot R_{b3}(t)^T \qquad J_3(0) = \begin{pmatrix} 25.305 & 0.136 & 0 \\ 0.136 & 1.007 & 0 \\ 0 & 0 & 26.012 \end{pmatrix}$$

Rovnováha sil a momentů pro jednotlivé články - rekurentní vzorce

Pozor !!!!! Zatím není uvažován vliv vnitřních převodů a rozvodů, také výsledky z Pro/E jsou pro mechanismus s odpojenými (uvnitř nepohyblivými) vnitřními převody - vystupují tam jen jako hmot-nost, nejsou zahrnuty jejich redukované momenty setrvačnosti při roztáčení!!!

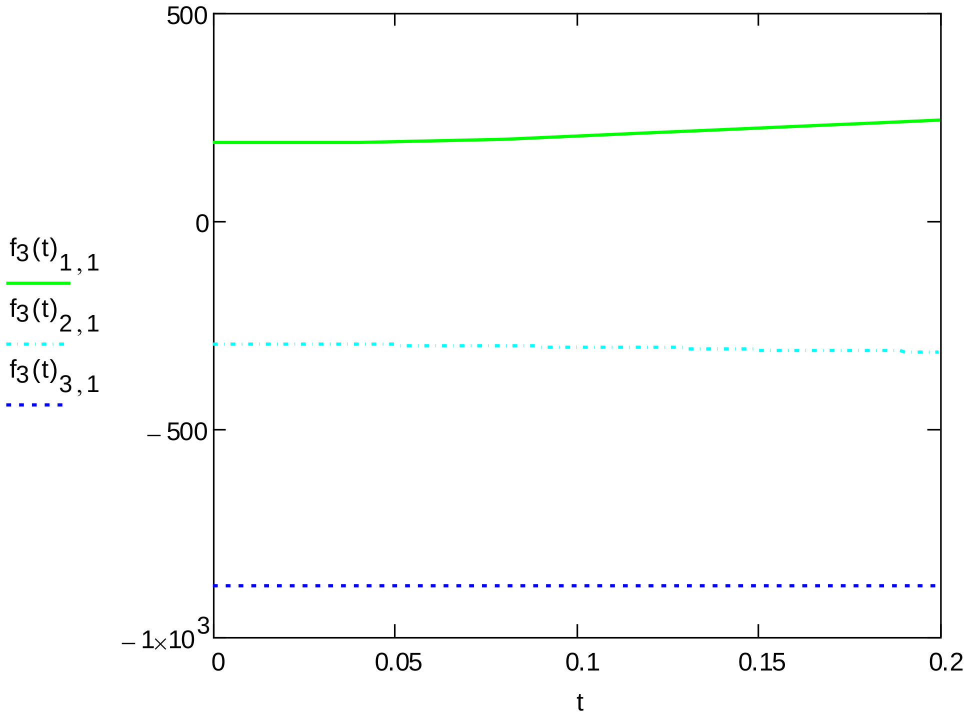
Síly a momenty na koncový bod v zákl. ss

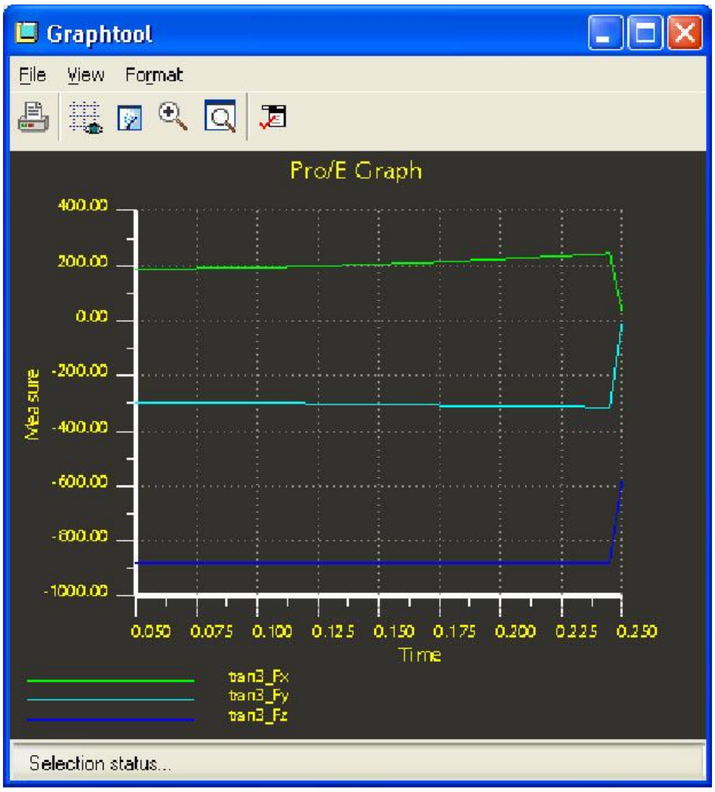
$$f_4(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n_4(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g := 9.80665 \qquad G := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.807 \end{pmatrix}$$

Rovnováha sil - třetí článek

$$f_3(t) := m_3 \cdot G - m_3 \cdot a_{t3}(t) + f_4(t) \qquad f_3(0) = \begin{pmatrix} 187.641 \\ -295.551 \\ -877.459 \end{pmatrix}$$



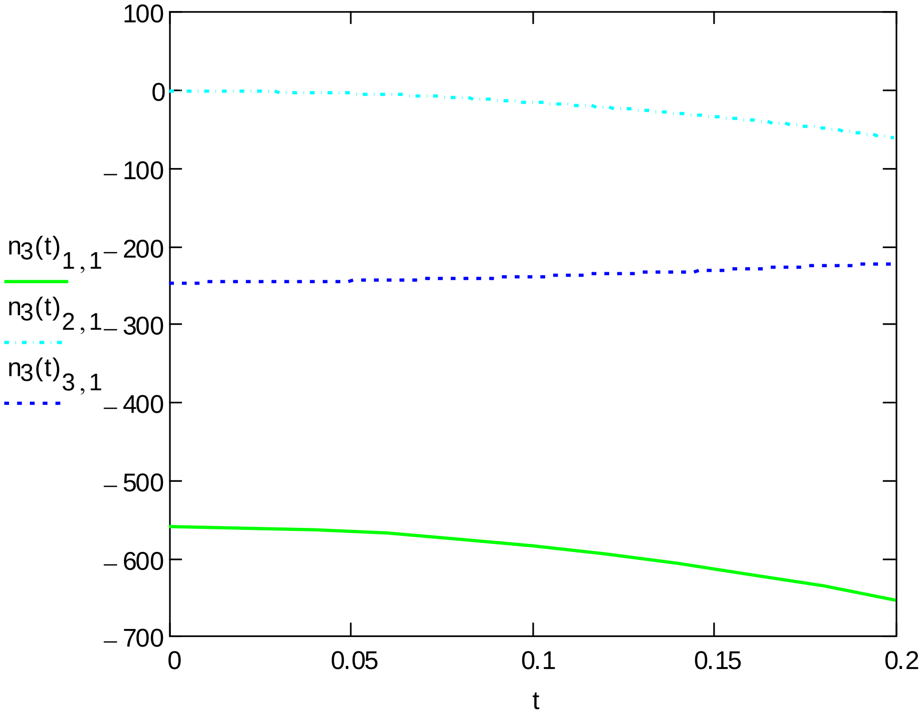


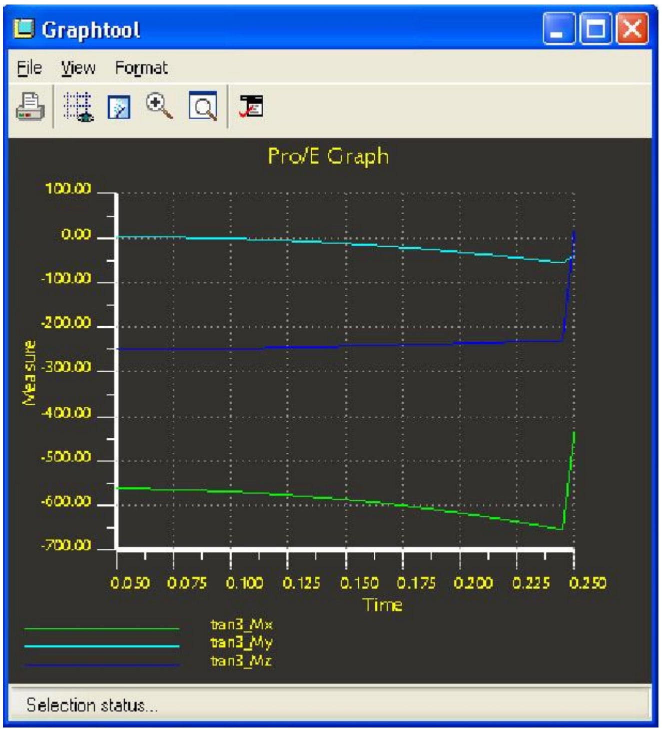
Moment tečných a odstředivých sil vyjádřený v zákl. ss.

$$N_3(t) := -\left[J_3(t) \cdot \varepsilon_3(t) + \omega_3(t) \times \left(J_3(t) \cdot \omega_3(t) \right) \right]$$

Rovnováha momentů k těžišti 3. článku v zákl. ss.

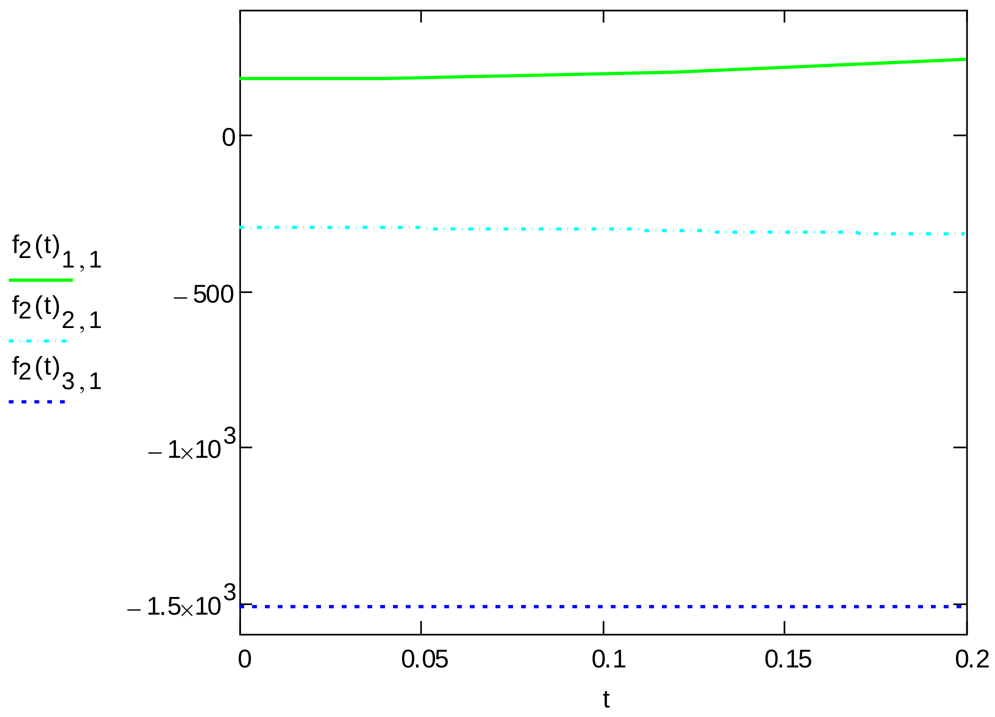
$$n_3(t) := n_4(t) + N_3(t) + \left(p_{23}(t) + p_{t3b}(t)\right) \times f_3(t) - p_{t3b}(t) \times f_4(t) \qquad n_3(0) = \begin{pmatrix} -561.225 \\ -2.259 \\ -248.029 \end{pmatrix}$$

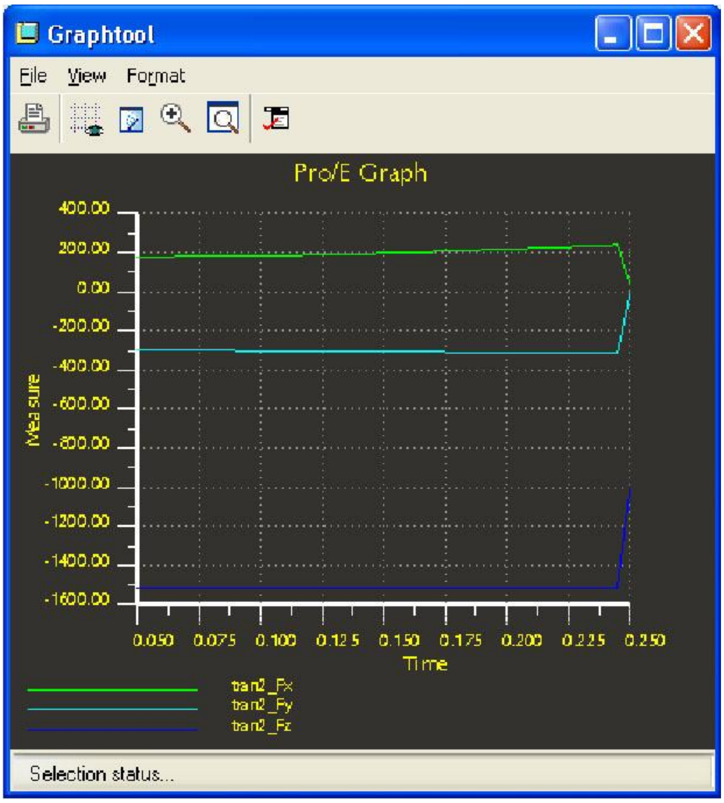




Rovnováha sil - druhý článek

$$f_2(t) := m_2 \cdot G - m_2 \cdot a_{t2}(t) + f_3(t) \qquad f_2(0) = \begin{pmatrix} 177.568 \\ -297.115 \\ -1.513 \times 10^3 \end{pmatrix}$$



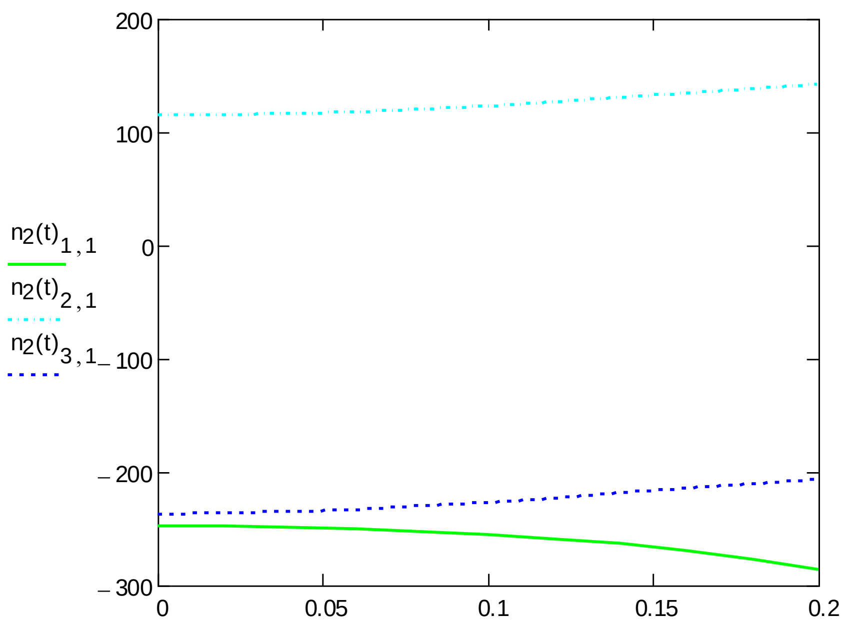


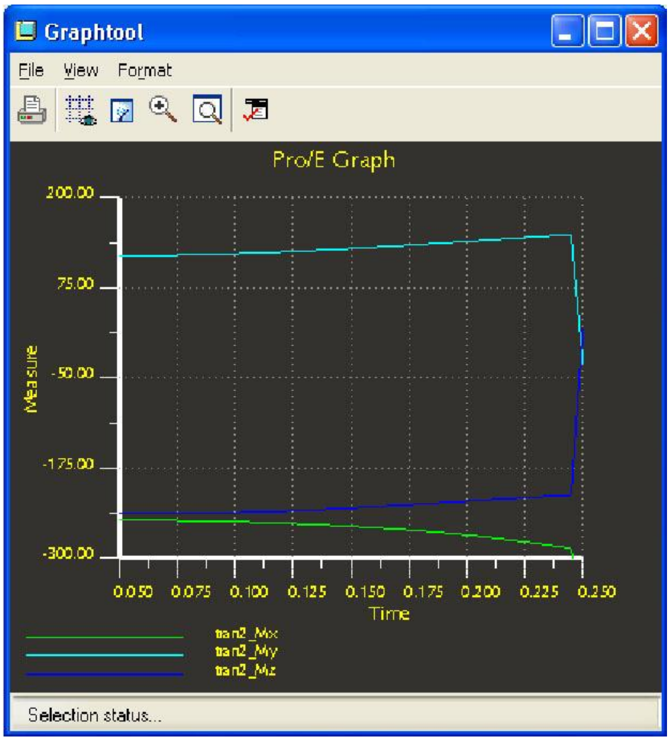
Moment tečných a odstředivých sil vůči zákl. ss.

$$N_2(t) := J_2(t)\cdot\varepsilon_2(t) + \omega_2(t)\times\left(J_2(t)\cdot\omega_2(t)\right) \qquad N_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7.289 \end{pmatrix}$$

Rovnováha momentů k těžišti v zákl. ss.

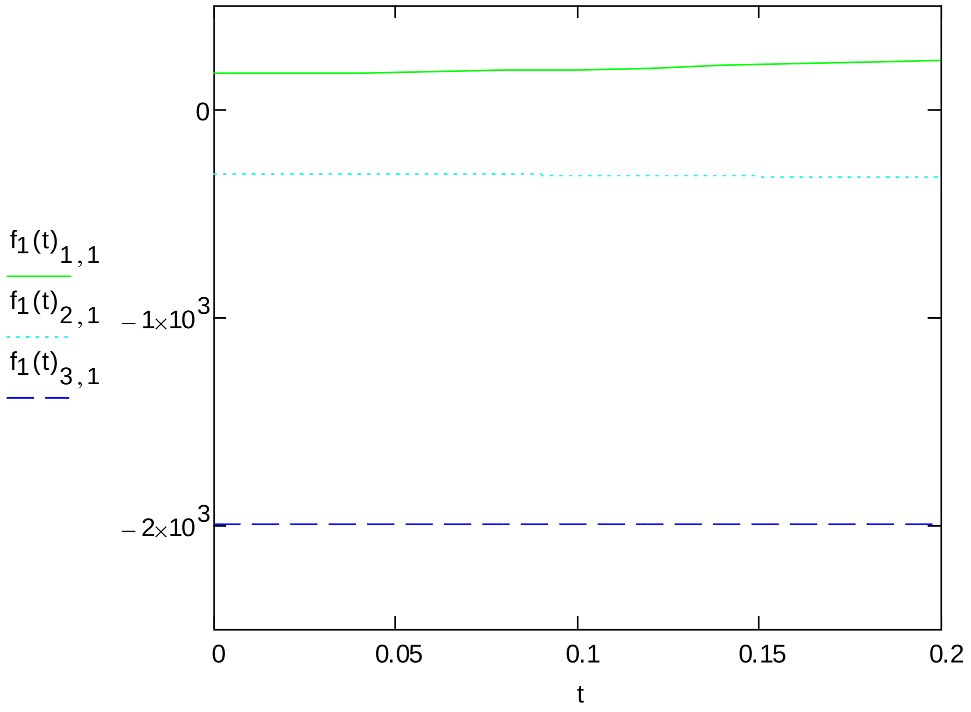
$$n_2(t) := n_3(t) - N_2(t) + \left(p_{12}(t) + p_{t2b}(t)\right)\times f_2(t) - p_{t2b}(t)\times f_3(t) \qquad n_2(0) = \begin{pmatrix} -247.647 \\ 114.786 \\ -236.596 \end{pmatrix}$$

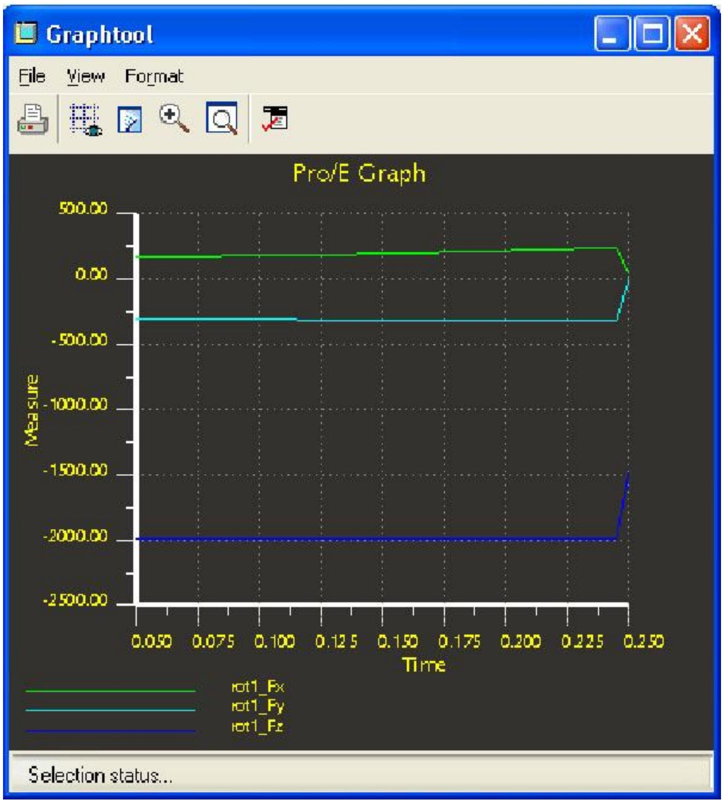




Rovnováha sil - první článek

$$f_1(t) := m_1 \cdot G - m_1 \cdot a_{t1}(t) + f_2(t) \qquad f_1(0) = \begin{pmatrix} 177.568 \\ -306.862 \\ -1.991 \times 10^3 \end{pmatrix}$$



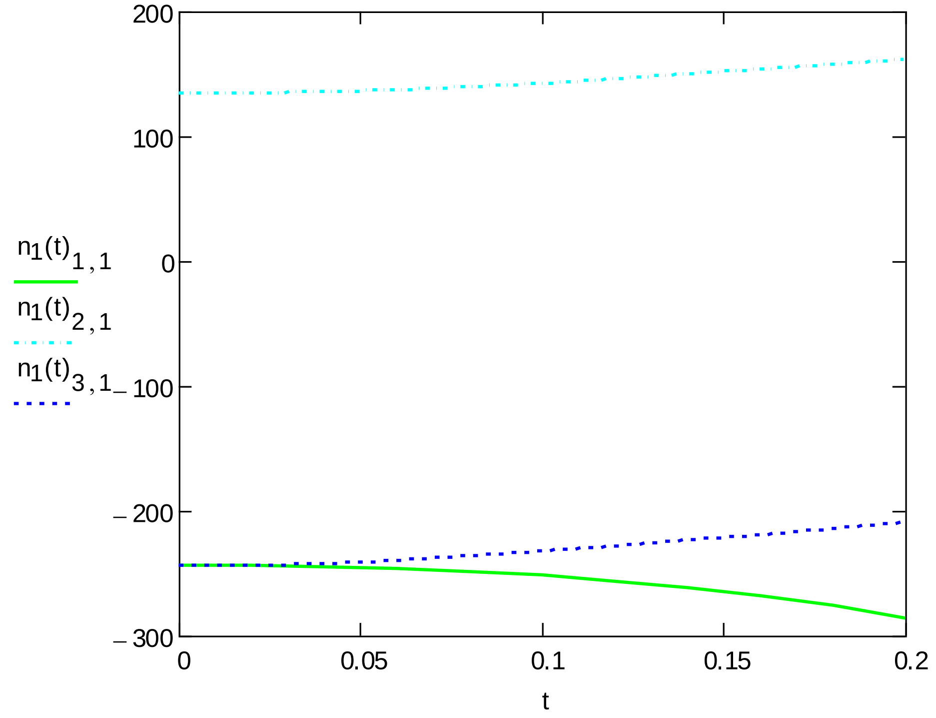


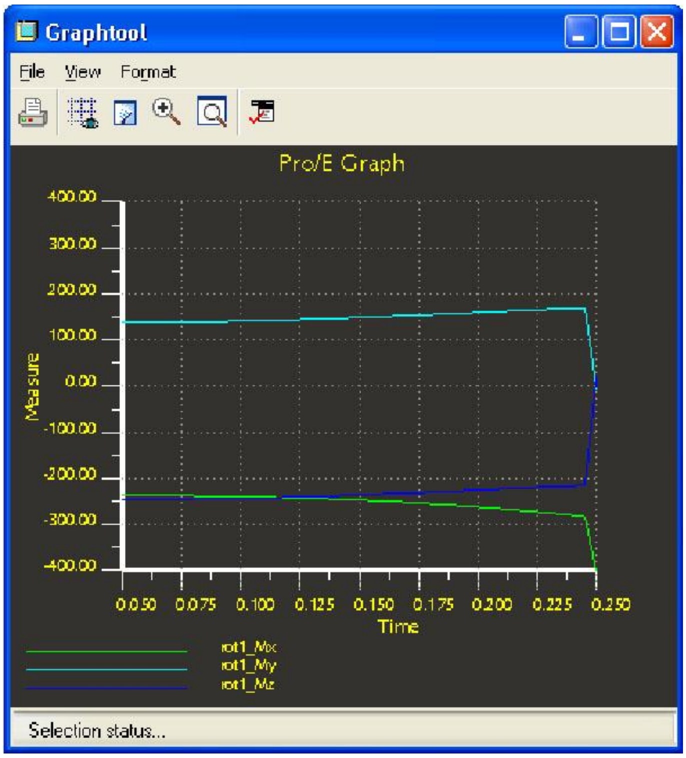
Moment tečných a odstředivých sil vůči zákl. ss.

$$N_1(t) := J_1(t) \cdot \varepsilon_1(t) + \omega_1(t) \times \left(J_1(t) \cdot \omega_1(t)\right) \qquad N_1(0) = \begin{pmatrix} 2.967 \\ 4.009 \times 10^{-4} \\ 6.607 \end{pmatrix}$$

Rovnováha momentů k těžišti v zákl. ss.

$$n_1(t) := n_2(t) - N_1(t) + \left(p_{01}(t) + p_{t1b}(t)\right) \times f_1(t) - p_{t1b}(t) \times f_2(t) \qquad n_1(0) = \begin{pmatrix} -243.443 \\ 134.094 \\ -243.596 \end{pmatrix}$$



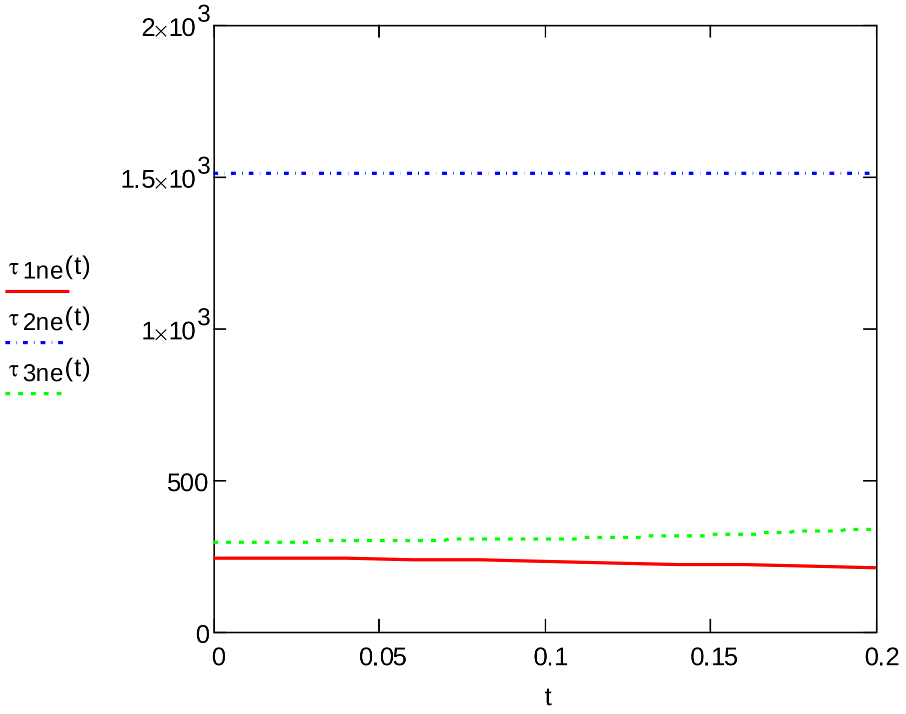


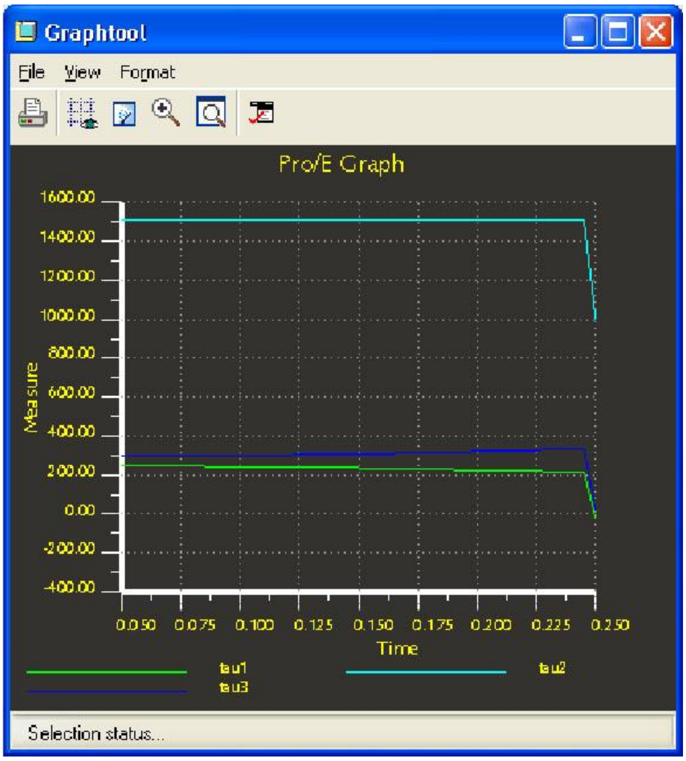
Zobecněné síly Newton-Euler

$$\tau_{1ne}(t) := k_0(t) \cdot -n_1(t)$$

$$\tau_{2ne}(t) := k_1(t) \cdot -f_2(t)$$

$$\tau_{3ne}(t) := k_2(t) \cdot -f_3(t)$$





$\tau_{1ne}(t) =$

243.596
243.12
241.71
239.418
236.333
232.571
228.277
223.617
218.77
213.922
209.258

$\tau_{2ne}(t) =$

$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$

$\tau_{3ne}(t) =$

295.551
296.063
297.582
300.063
303.43
307.583
312.402
317.757
323.506
329.509
335.633

Zahrnutí vlivu vnitřních převodů a rozvodů na dynamiku mechanismu (redukované momenty a hmotnosti)

$J_{p1} := 5.8702800000$ *Zahrnutí vlivu momentu setrvačnosti rotoru motoru, převodovky a vnitřních kroužků velkých ložisek*

$J_{p21} := 1.4780800$ *Zahrnutí vlivu zrychlení vnitřních převodů TRAN2 na zobecněnou sílu tau1*

$m_{p12} := J_{p21}$ *Zahrnutí vlivu zrychlení ROT1 na vnitřní převody TRAN2*

$m_{p2} := 123.09124685$ *Zahrnutí zvýšení redukované hmotnosti článku TRAN2 vlivem zrychlení rotoru MOT2 a jeho převodovky a pohybového šroubu*

$m_{p3} := 51.5751826083$ *Zahrnutí zvýšení redukované hmotnosti vlivem zrychlení rotoru motoru MOT3, ozubeného kola a matice pohybového šroubu (řemen neuvažován)*

Pozn. - Nejsou uvaž ovány gyroskopické efekty

$$\tau_{1nep}(t) := \tau_{1ne}(t) + J_{p1} \cdot ddq_1(t) - m_{p12} \cdot ddq_2(t)$$

Zobecněné síly s uvažováním vnitřních převodů

$$\tau_{2nep}(t) := \tau_{2ne}(t) + m_{p2} \cdot ddq_2(t) - J_{p21} \cdot ddq_1(t)$$

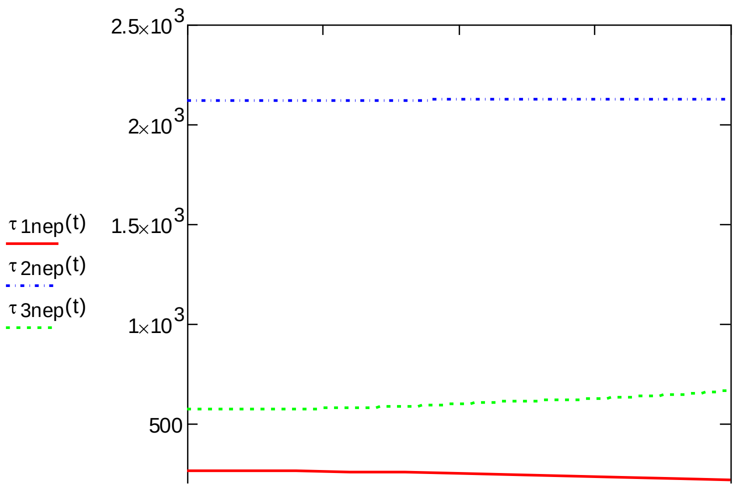
$$\tau_{3nep}(t) := \tau_{3ne}(t) + m_{p3} \cdot ddq_3(t)$$

$\tau_{1nep}(t) =$	$\tau_{2nep}(t) =$	$\tau_{3nep}(t) =$
265.267	$2.121\cdot10^{3}$	570.023
264.613	$2.121\cdot10^{3}$	571.197
262.673	$2.121\cdot10^{3}$	574.683
259.511	$2.121\cdot10^{3}$	580.373
255.235	$2.121\cdot10^{3}$	588.092
249.989	$2.122\cdot10^{3}$	597.608
243.949	$2.122\cdot10^{3}$	608.643
237.322	$2.123\cdot10^{3}$	620.886
230.33	$2.123\cdot10^{3}$	634.007
223.209	$2.124\cdot10^{3}$	647.673
216.19	$2.124\cdot10^{3}$	661.561

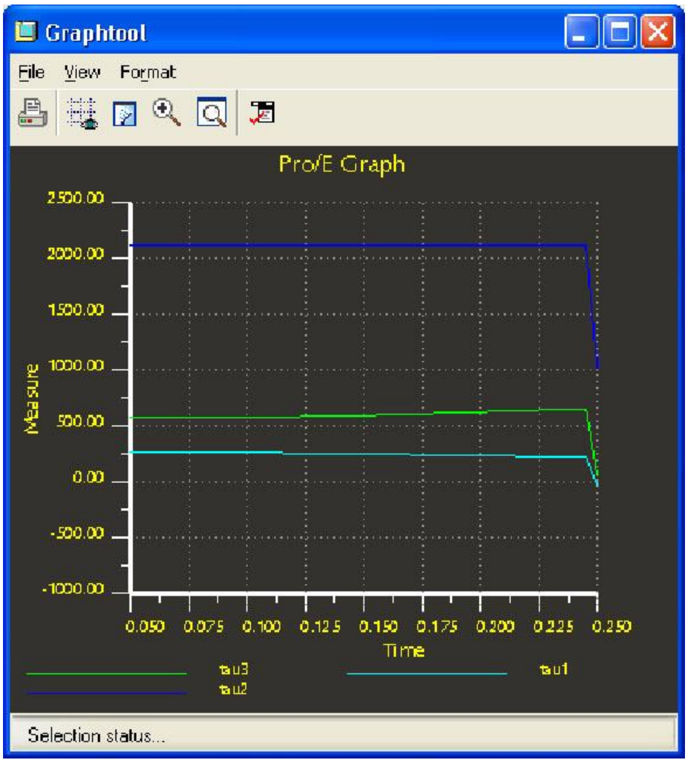
Pro porovnání zobecněné síly bez zahrnutí pohybu vnitřních převodů

$\tau_{1ne}(t) =$	$\tau_{2ne}(t) =$	$\tau_{3ne}(t) =$
243.596	$1.513\cdot10^{3}$	295.551
243.12	$1.513\cdot10^{3}$	296.063
241.71	$1.513\cdot10^{3}$	297.582
239.418	$1.513\cdot10^{3}$	300.063
236.333	$1.513\cdot10^{3}$	303.43
232.571	$1.513\cdot10^{3}$	307.583
228.277	$1.513\cdot10^{3}$	312.402
223.617	$1.513\cdot10^{3}$	317.757
218.77	$1.513\cdot10^{3}$	323.506
213.922	$1.513\cdot10^{3}$	329.509
209.258	$1.513\cdot10^{3}$	335.633

Z porovnání vyplývá, že zobecněné síly s uvažováním vnitřních převodů jsou výrazně vyšší (u třetí osy téměř dvojnásobek), není možno redukované momenty vnitřních převodů zanedbat!!!



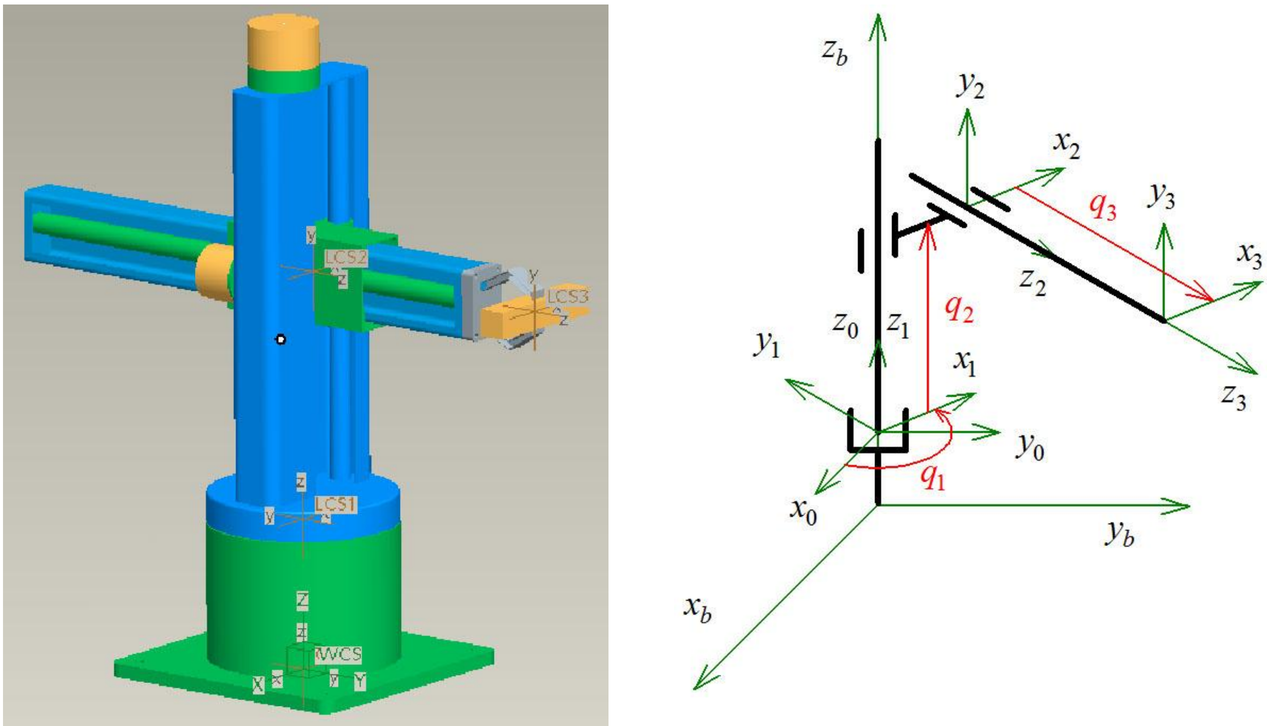
Zobecněné síly z úplného modelu v ProE včetně vnitřních převodů



Dále výpočet pokračuje vajádřením lagrangeových pohybových rovnic. Operace s maticemi vedou k tak rozsáhlým výrazům, že jejich výpis přímo v textu výukové opory byl značně nepřehledný. Postup výpočtu je nutno nastudovat přímo ze souboru MathCadu nebo výpisu souboru v html formátu.

10.7 Výpočet zobecněných sil pomocí Lagrangeovy pohybové rovnice v maticovém tvaru

Výpis příkladu s názvem *RTT_Lagr_maticove.xmcd*



Obr. 10-7 3D model a kinematické schéma vyšetřovaného mechanismu

Tabulka parametrů (Denavit-Hartenberg)

	theta	d	a	alfa
0	0	l0	0	0
1	q1	0	0	0
2	0	q2	l2	Pi/2
3	0	q3	0	0

$l_0 := 0.5$

$l_2 := 0.065$

ORIGIN := 1 $\quad$ $t := 0, 0.02 .. 0.2$ $\quad$ *rozsah času*

Parametry pohybu počátku LCS3 (na koncový bod nástroje je nutná další transformační matice)

zrychlení	*rychlost*	*poč. poloha*
$a_x := -5.0$	$v_{x0} := 0$	$x_0 := -0.065$
$a_y := 5.0$	$v_{y0} := 0$	$y_0 := 1.01$
$a_z := 5.0$	$v_{z0} := 0$	$z_0 := 1.454$

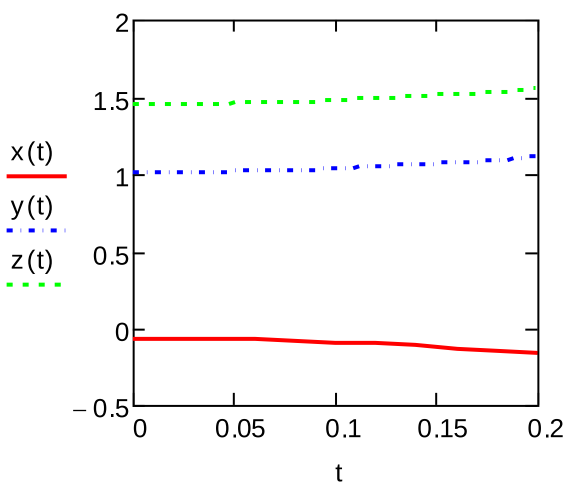
Rovnice pohybu počátku LCS3 - rovnoměrně zrychlený pohyb, trajektorii je vhodné řešit po částech s použitím počáteční polohy a rychlosti z koncových hodnot předchozího segmentu trajektorie.

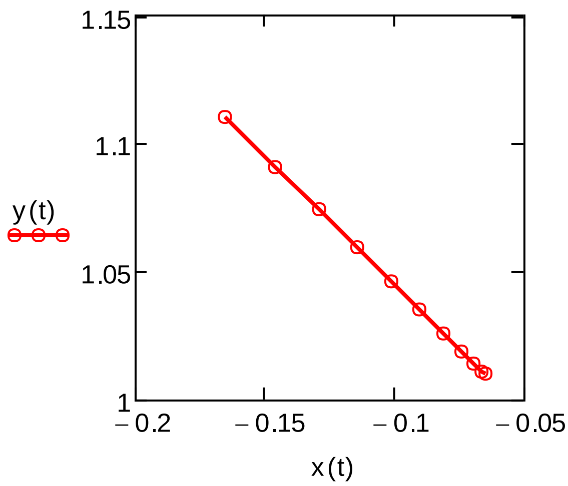
$$x(t) := x_0 + v_{x0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2$$

$$y(t) := y_0 + v_{y0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2$$

$$z(t) := z_0 + v_{z0} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a_z \cdot t^2$$

x(t) =	y(t) =	z(t) =
-0.065	1.01	1.454
-0.066	1.011	1.455
-0.069	1.014	1.458
-0.074	1.019	1.463
-0.081	1.026	1.47
-0.09	1.035	1.479
-0.101	1.046	1.49
-0.114	1.059	1.503
-0.129	1.074	1.518
-0.146	1.091	1.535
-0.165	1.11	1.554





Výchozí hodnota kloubových proměnných odpovídající výchozí poloze koncového bodu nutná pro řešič inverzní úlohy (Given, Find).

$s_1 := \pi$

$s_2 := 0.954$

$s_3 := 1.01$

Transformační matice mezi souřadnými systémy ve výchozí poloze.

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Celkové transformační matice

$$T_{b0} := A_{b0}$$

$$T_{b1} := A_{b0} \cdot A_{01}$$

$$T_{b2} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12}$$

$$T_{b3} := A_{b0} \cdot A_{01} \cdot A_{12} \cdot A_{23}$$

Pro sestavení rovnic inverzní úlohy je celková transformační matice vyjádřena symbolickým vynásobením jednotlivých matic.

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(s_1) & -\sin(s_1) & 0 & 0 \\ \sin(s_1) & \cos(s_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3} := \begin{pmatrix} \cos(s_1) & 0 & \sin(s_1) & \sin(s_1) \cdot s_3 + \cos(s_1) \cdot l_2 \\ \sin(s_1) & 0 & -\cos(s_1) & -\cos(s_1) \cdot s_3 + \sin(s_1) \cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & s_2 + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{b3} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní úloha pomocí řešení soustavy transcendentních rovnic

Given

$$s_3 \cdot \sin(s_1) + l_2 \cdot \cos(s_1) = x$$

$$l_2 \cdot \sin(s_1) - s_3 \cdot \cos(s_1) = y$$

$$s_2 + l_0 = z$$

$$Q(x,y,z) := \mathrm{Find}(s_1, s_2, s_3)$$

$$q_1(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{1,1}$$

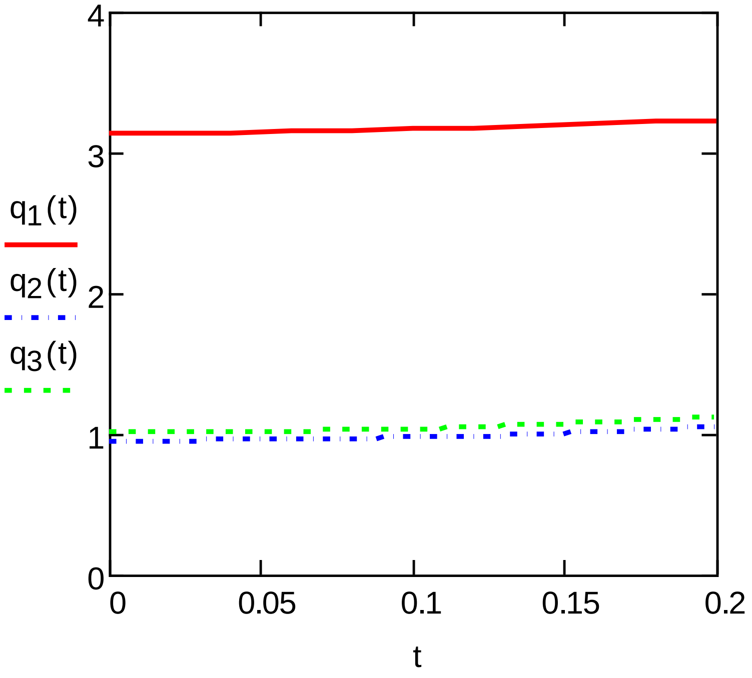
$$q_2(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{2,1}$$

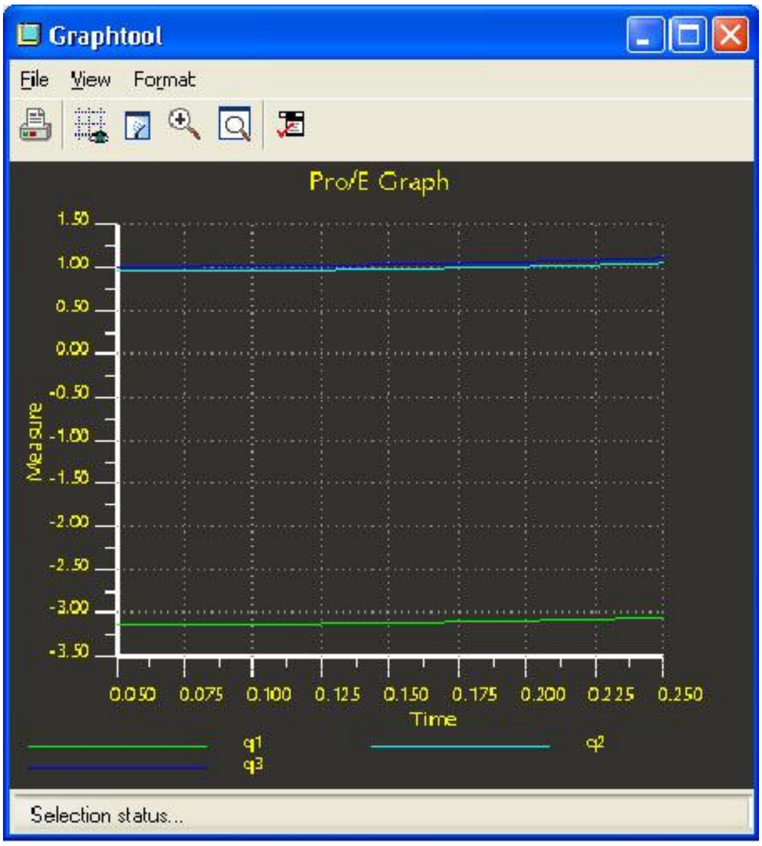
$$q_3(t) := Q(x(t), y(t), z(t))_{3,1}$$

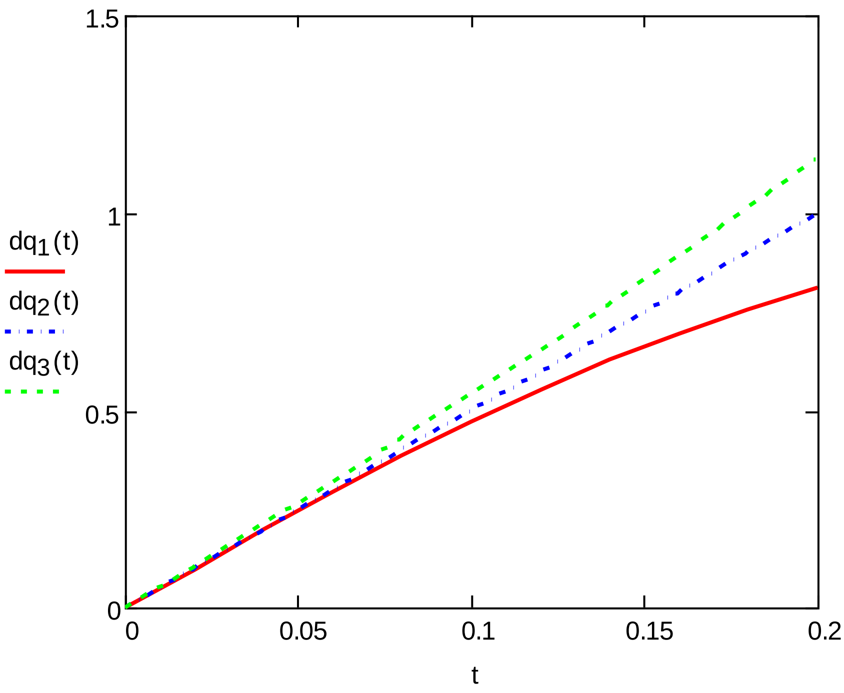
Výpočet rychlosti a zrychlení jednotlivých kloubových proměnných

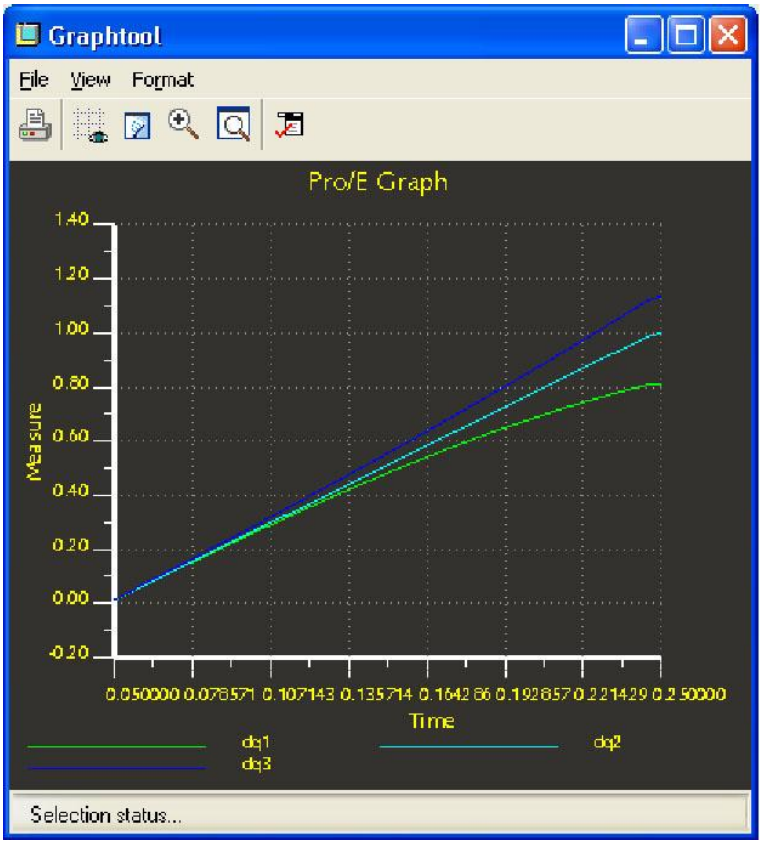
$dq_1(t) := \frac{d}{dt} q_1(t)$ $\quad dq_2(t) := \frac{d}{dt} q_2(t)$ $\quad dq_3(t) := \frac{d}{dt} q_3(t)$ *rychlosti*

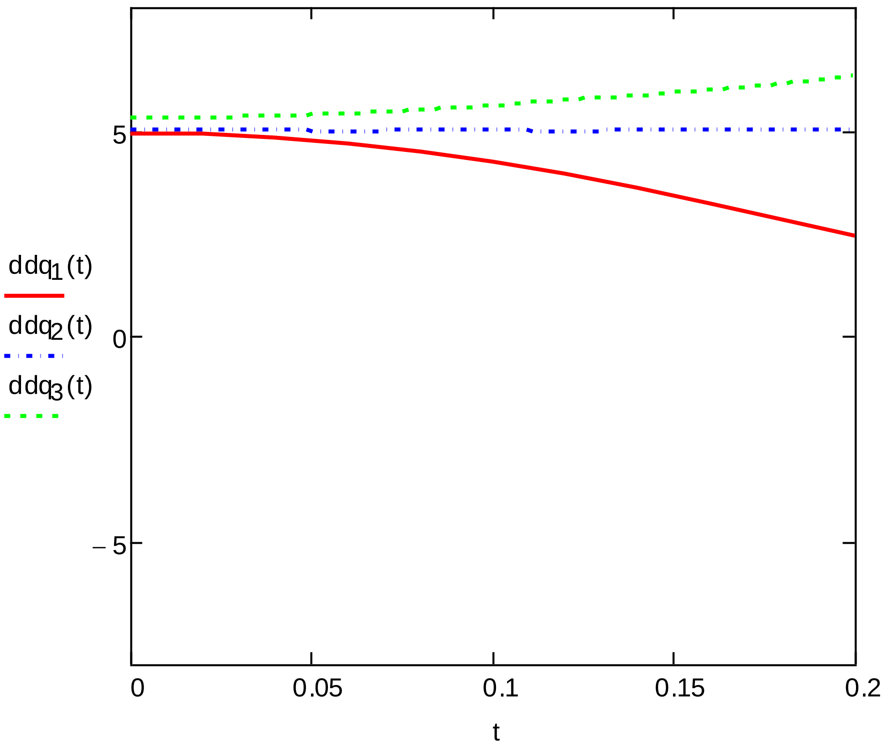
$ddq_1(t) := \frac{d}{dt} dq_1(t)$ $\quad ddq_2(t) := \frac{d}{dt} dq_2(t)$ $\quad ddq_3(t) := \frac{d}{dt} dq_3(t)$ *zrychlení*

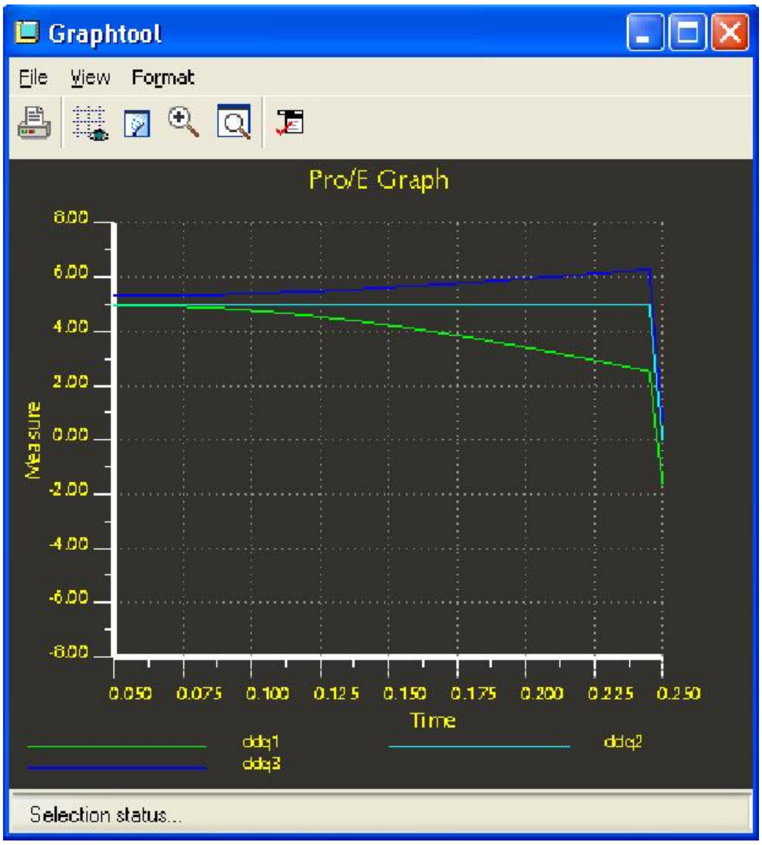



Graphtool
File View Format
Pro/E Graph
Measure
1.50
1.00
0.50
0.00
-0.50
-1.00
-1.50
-2.00
-2.50
-3.00
-3.50
0.050 0.075 0.100 0.125 0.150 0.175 0.200 0.225 0.250
Time
q1
q2
q3
Selection status...


1.5
1
0.5
0
dq1(t)
dq2(t)
dq3(t)
0 0.05 0.1 0.15 0.2
t


Graphtool
File View Format
Pro/E Graph
Measure
Time
dq1
dq2
dq3
Selection status...


$ddq_1(t)$
$ddq_2(t)$
$ddq_3(t)$
t



Transformační matice mezi souřadnými systémy

$$A_{b0} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{01}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{12}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{23}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b1}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T_{b1}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) \cdot l_2 \\ \sin(q_1(t)) & 0 & -\cos(q_1(t)) & \sin(q_1(t)) \cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b2}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & -\sin(q_1(t)) & 0 & 0 \\ \sin(q_1(t)) & \cos(q_1(t)) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3(t) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(t) := \begin{pmatrix} \cos(q_1(t)) & 0 & \sin(q_1(t)) & \sin(q_1(t)) \cdot q_3(t) + \cos(q_1(t)) \cdot l_2 \\ \sin(q_1(t)) & 0 & -\cos(q_1(t)) & -\cos(q_1(t)) \cdot q_3(t) + \sin(q_1(t)) \cdot l_2 \\ 0 & 1 & 0 & q_2(t) + l_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{b3}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -0.065 \\ 0 & 0 & 1 & 1.01 \\ 0 & 1 & 0 & 1.454 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrola správnosti sestavení transformačních matic s průběhem koncového bodu (poč. LCS3)

$T_{b3}(t)_{1,4}$ =	x(t) =	$T_{b3}(t)_{2,4}$ =	y(t) =	$T_{b3}(t)_{3,4}$ =	z(t) =
-0.065	-0.065	1.01	1.01	1.454	1.454
-0.066	-0.066	1.011	1.011	1.455	1.455
-0.069	-0.069	1.014	1.014	1.458	1.458
-0.074	-0.074	1.019	1.019	1.463	1.463
-0.081	-0.081	1.026	1.026	1.47	1.47
-0.09	-0.09	1.035	1.035	1.479	1.479
-0.101	-0.101	1.046	1.046	1.49	1.49
-0.114	-0.114	1.059	1.059	1.503	1.503
-0.129	-0.129	1.074	1.074	1.518	1.518
-0.146	-0.146	1.091	1.091	1.535	1.535
-0.165	-0.165	1.11	1.11	1.554	1.554

Lagrangeova pohybová rovnice - maticový výpočet

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\ddot{q}_k + \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k - \sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\left(\mathbf{p}_i^*\right)_i = \tau_j$$

Totální diferenciály transformačních matic podle času pomocí diferenciálních operátorů

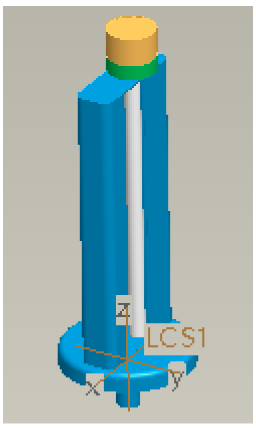
Pro rotační kloub

$$D_r := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro translač ní kloub

$$D_t := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Článek ROT1



ROT1
MASS = 4.8824683e+01 KILOGRAM

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS1 coordinate frame:
X Y Z -4.0325987e-02 -1.8024766e-06 7.3574162e-01 M

*INERTIA with respect to LCS1 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 4.6443693e+01 -7.9670815e-06 2.0478701e+00
Iyx Iyy Iyz -7.9670815e-06 4.7356949e+01 1.4573962e-04
Izx Izy Izz 2.0478701e+00 1.4573962e-04 1.4139746e+00

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to LCS1 coordinate frame:
*(KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 2.0014124e+01 -4.4181788e-06 5.9926583e-01
Iyx Iyy Iyz -4.4181788e-06 2.0847982e+01 8.0990420e-05
Izx Izy Izz 5.9926583e-01 8.0990420e-05 1.3345766e+00

Pozor - pro Lagrangeovu pohybovou rovnici se použije matice setrvačnosti k lokálnímu souřadnému systému (ta první v pořadí), pro Newton-Eulerovy vztahy byla předtím použita matice setrvačnosti k těžišti (druhá matice)!!!

Článek 1
momenty k lokálnímu ss

$$m_1 := 4.8824683 \cdot 10^{1}$$

$$x_{t11} := -4.0325987 \cdot 10^{-2}$$

$$y_{t11} := -1.8024766 \cdot 10^{-6}$$

$$z_{t11} := 7.3574162 \cdot 10^{-1}$$

$$J_{x1} := 4.6443693 \cdot 10^{1}$$

$$J_{xy1} := -7.9670815 \cdot 10^{-6} \qquad J_{y1} := 4.7356949 \cdot 10^{1}$$

$$J_{xz1} := 2.0478701 \qquad J_{yz1} := 1.4573962 \cdot 10^{-4} \qquad J_{z1} := 1.4139746$$

Přepočet momentů setrvačnosti k osám na momenty setrvačnosti k rovinám

$$J_{xx1} := \frac{J_{y1} + J_{z1} - J_{x1}}{2}$$

$$J_{yy1} := \frac{J_{z1} + J_{x1} - J_{y1}}{2} \qquad P_{t11} := \begin{pmatrix} x_{t11} \\ y_{t11} \\ z_{t11} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{t11} = \begin{pmatrix} -0.04 \\ -1.802 \times 10^{-6} \\ 0.736 \\ 1 \end{pmatrix}$$

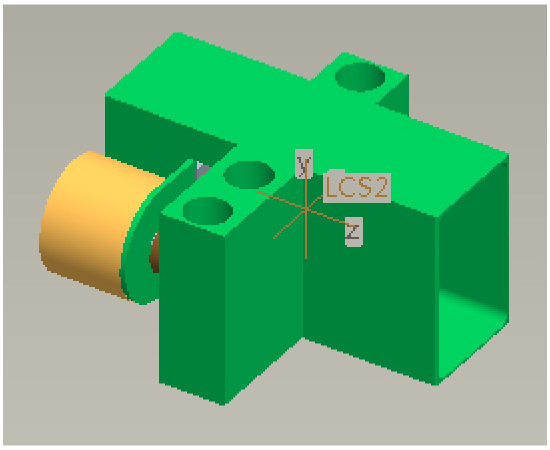
$$J_{zz1} := \frac{J_{x1} + J_{y1} - J_{z1}}{2}$$

Homogenní matice setrvačnosti

$$H_1 := \begin{pmatrix} J_{xx1} & J_{xy1} & J_{xz1} & m_1 \cdot x_{t11} \\ J_{xy1} & J_{yy1} & J_{yz1} & m_1 \cdot y_{t11} \\ J_{xz1} & J_{yz1} & J_{zz1} & m_1 \cdot z_{t11} \\ m_1 \cdot x_{t11} & m_1 \cdot y_{t11} & m_1 \cdot z_{t11} & m_1 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1.164 & -7.967 \times 10^{-6} & 2.048 & -1.969 \\ -7.967 \times 10^{-6} & 0.25 & 1.457 \times 10^{-4} & -8.801 \times 10^{-5} \\ 2.048 & 1.457 \times 10^{-4} & 46.193 & 35.922 \\ -1.969 & -8.801 \times 10^{-5} & 35.922 & 48.825 \end{pmatrix}$$

Článek TRAN2



TRAN2
MASS = 4.2894906e+01 KILOGRAM

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS2 coordinate frame:
X Y Z -7.2368752e-02 0.0000000e+00 -4.7439674e-02 M

*INERTIA with respect to LCS2 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 1.0344896e+00 0.0000000e+00 -1.2186605e-01
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 1.7935719e+00 0.0000000e+00
Izx Izy Izz -1.2186605e-01 0.0000000e+00 1.4614205e+00

INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to LCS2 coordinate frame:
*(KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 9.3795366e-01 0.0000000e+00 2.5398594e-02
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 1.4723852e+00 0.0000000e+00
Izx Izy Izz 2.5398594e-02 0.0000000e+00 1.2367697e+00

Článek 2
momenty k lokálnímu ss

$$m_2 := 4.2894906 \cdot 10^{1}$$

$$x_{t22} := -7.2368752 \cdot 10^{-2}$$

$$y_{t22} := 0.0000000$$

$$z_{t22} := -4.7439674 \cdot 10^{-2}$$

$$J_{x2} := 1.0344896$$

$$J_{xy2} := 0 \qquad J_{y2} := 1.7935719$$

$$J_{xz2} := -1.2186605 \cdot 10^{-1} \qquad J_{yz2} := 0 \qquad J_{z2} := 1.4614205$$

Přepočet momentů setrvačnosti k osám na momenty setrvačnosti k rovinám

$$J_{xx2} := \frac{J_{y2} + J_{z2} - J_{x2}}{2}$$

$$J_{yy2} := \frac{J_{z2} + J_{x2} - J_{y2}}{2} \qquad P_{t22} := \begin{pmatrix} x_{t22} \\ y_{t22} \\ z_{t22} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{t22} = \begin{pmatrix} -0.072 \\ 0 \\ -0.047 \\ 1 \end{pmatrix}$$

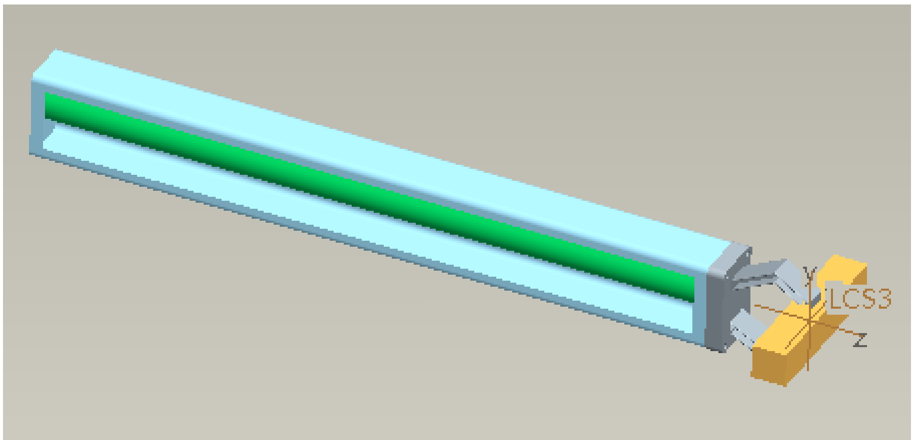
$$J_{zz2} := \frac{J_{x2} + J_{y2} - J_{z2}}{2}$$

Homogenní matice setrvačnosti

$$H_2 := \begin{pmatrix} J_{xx2} & J_{xy2} & J_{xz2} & m_2 \cdot x_{t22} \\ J_{xy2} & J_{yy2} & J_{yz2} & m_2 \cdot y_{t22} \\ J_{xz2} & J_{yz2} & J_{zz2} & m_2 \cdot z_{t22} \\ m_2 \cdot x_{t22} & m_2 \cdot y_{t22} & m_2 \cdot z_{t22} & m_2 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1.11 & 0 & -0.122 & -3.104 \\ 0 & 0.351 & 0 & 0 \\ -0.122 & 0 & 0.683 & -2.035 \\ -3.104 & 0 & -2.035 & 42.895 \end{pmatrix}$$

Článek TRAN3



TRAN3
MASS = 5.9261161e+01 KILOGRAM

CENTER OF GRAVITY with respect to LCS3 coordinate frame:
X Y Z 2.5740416e-03 0.0000000e+00 -3.7039760e-01 M

*INERTIA with respect to LCS3 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 3.3435680e+01 0.0000000e+00 1.9296398e-01
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 3.4142950e+01 0.0000000e+00
Izx Izy Izz 1.9296398e-01 0.0000000e+00 1.0075258e+00

*INERTIA at CENTER OF GRAVITY with respect to LCS3 coordinate frame: (KILOGRAM * M^2)*

INERTIA TENSOR:
Ixx Ixy Ixz 2.5305381e+01 0.0000000e+00 1.3646327e-01
Iyx Iyy Iyz 0.0000000e+00 2.6012259e+01 0.0000000e+00
Izx Izy Izz 1.3646327e-01 0.0000000e+00 1.0071331e+00

Článek 3
momenty k lokálnímu ss

$$m_3 := 5.9261161 \cdot 10^{1}$$

$$x_{t33} := 2.5740416 \cdot 10^{-3}$$

$$y_{t33} := 0.0000000000$$

$$z_{t33} := -3.7039760 \cdot 10^{-1}$$

$$J_{x3} := 3.3435680 \cdot 10^{1}$$

$$J_{xy3} := 0.0000000 \qquad J_{y3} := 3.4142950 \cdot 10^{1}$$

$$J_{xz3} := 1.9296398 \cdot 10^{-1} \qquad J_{yz3} := 0.0000000 \qquad J_{z3} := 1.0075258$$

Přepočet momentů setrvačnosti k osám na momenty setrvačnosti k rovinám

$$J_{xx3} := \frac{J_{y3} + J_{z3} - J_{x3}}{2}$$

$$J_{yy3} := \frac{J_{z3} + J_{x3} - J_{y3}}{2}$$

$$J_{zz3} := \frac{J_{x3} + J_{y3} - J_{z3}}{2}$$

$$P_{t33} := \begin{pmatrix} x_{t33} \\ y_{t33} \\ z_{t33} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_{t33} = \begin{pmatrix} 2.574 \times 10^{-3} \\ 0 \\ -0.37 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Homogenní matice setrvačnosti

$$H_3 := \begin{pmatrix} J_{xx3} & J_{xy3} & J_{xz3} & m_3 \cdot x_{t33} \\ J_{xy3} & J_{yy3} & J_{yz3} & m_3 \cdot y_{t33} \\ J_{xz3} & J_{yz3} & J_{zz3} & m_3 \cdot z_{t33} \\ m_3 \cdot x_{t33} & m_3 \cdot y_{t33} & m_3 \cdot z_{t33} & m_3 \end{pmatrix}$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0.857 & 0 & 0.193 & 0.153 \\ 0 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0.193 & 0 & 33.286 & -21.95 \\ 0.153 & 0 & -21.95 & 59.261 \end{pmatrix}$$

Výpočet zobecněné síly pomocí Lagrangeovy pohybové rovnice II. druhu

$$\sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\ddot{q}_k + \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k - \sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\left(\mathbf{p}_i^*\right)_i = \tau_j$$

$U_{11}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t)$

$U_{21}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t)$

$U_{22}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t)$

$U_{31}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t)$

$U_{32}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t)$

$U_{33}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot A_{23}(t)$

$U_{111}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot D_r \cdot A_{01}(t)$

$U_{211}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t)$

$U_{212}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t)$

$U_{221}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t)$

$U_{222}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot D_t \cdot A_{12}(t)$

$U_{311}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t)$

$U_{312}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t)$

$U_{313}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot A_{23}(t)$

$U_{321}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t)$

$U_{322}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot D_t \cdot A_{12}(t) \cdot A_{23}(t)$

$U_{323}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot A_{23}(t)$

$U_{331}(t) := A_{b0} \cdot D_r \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot A_{23}(t)$

$U_{332}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot D_t \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot A_{23}(t)$

$U_{333}(t) := A_{b0} \cdot A_{01}(t) \cdot A_{12}(t) \cdot D_t \cdot D_t \cdot A_{23}(t)$

První člen Lagrangeovy rovnice pro j =1

$$l_{j1} = \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\ddot{q}_k$$

$$l_{11}(t) := tr\left(U_{11}(t)\cdot H_1\cdot U_{11}(t)^T\right)\cdot ddq_1(t) + tr\left(U_{21}(t)\cdot H_2\cdot U_{21}(t)^T\right)\cdot ddq_1(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{21}(t)\cdot H_2\cdot U_{22}(t)^T\right)\cdot ddq_2(t) + tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{31}(t)^T\right)\cdot ddq_1(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{32}(t)^T\right)\cdot ddq_2(t) + tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{33}(t)^T\right)\cdot ddq_3(t)$$

Druhý člen Lagrangeovy rovnice

$$l_{j2} = \sum_{i=j}^{n}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k$$

$$l_{12}(t) := tr\left(U_{11}(t)\cdot H_1\cdot U_{111}(t)^T\right)\cdot dq_1(t)\cdot dq_1(t) + tr\left(U_{21}(t)\cdot H_2\cdot U_{211}(t)^T\right)\cdot dq_1(t)\cdot dq_1(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{21}(t)\cdot H_2\cdot U_{212}(t)^T\right)\cdot dq_2(t)\cdot dq_1(t) + tr\left(U_{21}(t)\cdot H_2\cdot U_{221}(t)^T\right)\cdot dq_1(t)\cdot dq_2(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{21}(t)\cdot H_2\cdot U_{222}(t)^T\right)\cdot dq_2(t)\cdot dq_2(t) + tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{311}(t)^T\right)\cdot dq_1(t)\cdot dq_1(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{312}(t)^T\right)\cdot dq_2(t)\cdot dq_1(t) + tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{313}(t)^T\right)\cdot dq_3(t)\cdot dq_1(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{321}(t)^T\right)\cdot dq_1(t)\cdot dq_2(t) + tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{322}(t)^T\right)\cdot dq_2(t)\cdot dq_2(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{323}(t)^T\right)\cdot dq_3(t)\cdot dq_2(t) + tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{331}(t)^T\right)\cdot dq_1(t)\cdot dq_3(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{332}(t)^T\right)\cdot dq_2(t)\cdot dq_3(t) + tr\left(U_{31}(t)\cdot H_3\cdot U_{333}(t)^T\right)\cdot dq_3(t)\cdot dq_3(t)$$

Třetí člen Lagrangeovy rovnice

$$l_{j3} = \sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\left(\mathbf{p}_i^*\right)_i \qquad g := 9.80665 \qquad G := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$l_{13}(t) := m_1\cdot G^T\cdot U_{11}(t)\cdot P_{t11} + m_2\cdot G^T\cdot U_{21}(t)\cdot P_{t22} + m_3\cdot G^T\cdot U_{31}(t)\cdot P_{t33}$$

Zobecněná síla v kloubu 1

$$\tau_{1L}(t) := l_{11}(t) + l_{12}(t) - l_{13}(t)$$

První člen Lagrangeovy rovnice pro j = 2

$$l_{j1} = \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\ddot{q}_k$$

$$\begin{aligned} l_{21}(t) := {} & tr\left(U_{22}(t) \cdot H_2 \cdot U_{21}(t)^T\right) \cdot ddq_1(t) + tr\left(U_{22}(t) \cdot H_2 \cdot U_{22}(t)^T\right) \cdot ddq_2(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{31}(t)^T\right) \cdot ddq_1(t) + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{32}(t)^T\right) \cdot ddq_2(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{33}(t)^T\right) \cdot ddq_3(t) \end{aligned}$$

Druhý člen Lagrangeovy rovnice

$$l_{j2} = \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k$$

$$\begin{aligned} l_{22}(t) := {} & tr\left(U_{22}(t) \cdot H_2 \cdot U_{211}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_1(t) + tr\left(U_{22}(t) \cdot H_2 \cdot U_{212}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_1(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{22}(t) \cdot H_2 \cdot U_{221}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_2(t) + tr\left(U_{22}(t) \cdot H_2 \cdot U_{222}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_2(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{311}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_1(t) + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{312}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_1(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{313}(t)^T\right) \cdot dq_3(t) \cdot dq_1(t) + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{321}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_2(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{322}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_2(t) + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{323}(t)^T\right) \cdot dq_3(t) \cdot dq_2(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{331}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_3(t) + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{332}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_3(t) \ldots \\ & + tr\left(U_{32}(t) \cdot H_3 \cdot U_{333}(t)^T\right) \cdot dq_3(t) \cdot dq_3(t) \end{aligned}$$

Třetí člen Lagrangeovy rovnice

$$l_{j3} = \sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\left(\mathbf{p}_i^*\right)_i$$

$$l_{23}(t) := m_2 \cdot G^T \cdot U_{22}(t) \cdot P_{t22} + m_3 \cdot G^T \cdot U_{32}(t) \cdot P_{t33}$$

Zobecněná síla v kloubu 2

$$\tau_{2L}(t) := l_{21}(t) + l_{22}(t) - l_{23}(t)$$

První člen Lagrangeovy rovnice pro j =3

$$l_{j1} = \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ik}^T\right].\ddot{q}_k$$

$$l_{31}(t) := tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{31}(t)^T\right) \cdot ddq_1(t) + tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{32}(t)^T\right) \cdot ddq_2(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{33}(t)^T\right) \cdot ddq_3(t)$$

Druhý člen Lagrangeovy rovnice

$$l_{j2} = \sum_{i=j}^{n} \sum_{k=1}^{i} \sum_{l=1}^{i} tr\left[\mathbf{U}_{ij}.\mathbf{H}_i.\mathbf{U}_{ikl}^T\right].\dot{q}_l.\dot{q}_k$$

$$l_{32}(t) := tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{311}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_1(t) + tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{312}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_1(t) \ldots$$
$$+ tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{313}(t)^T\right) \cdot dq_3(t) \cdot dq_1(t) + tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{321}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_2(t) ..$$
$$+ tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{322}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_2(t) + tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{323}(t)^T\right) \cdot dq_3(t) \cdot dq_2(t) ..$$
$$+ tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{331}(t)^T\right) \cdot dq_1(t) \cdot dq_3(t) + tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{332}(t)^T\right) \cdot dq_2(t) \cdot dq_3(t) ..$$
$$+ tr\left(U_{33}(t) \cdot H_3 \cdot U_{333}(t)^T\right) \cdot dq_3(t) \cdot dq_3(t)$$

Třetí člen Lagrangeovy rovnice

$$l_{j3} = \sum_{i=1}^{n} m_i.\mathbf{G}^T.\mathbf{U}_{ij}.\left(\mathbf{p}_i^*\right)_i$$

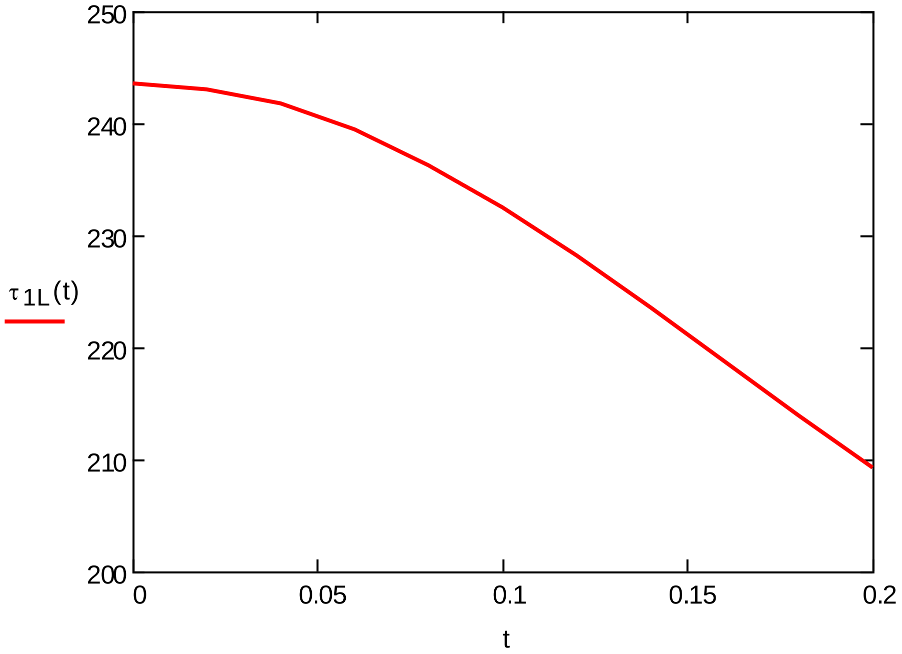
$$l_{33}(t) := m_3 \cdot G^T \cdot U_{33}(t) \cdot P_{t33}$$

Zobecně ná síla v kloubu 3

$$\tau_{3L}(t) := l_{31}(t) + l_{32}(t) - l_{33}(t)$$

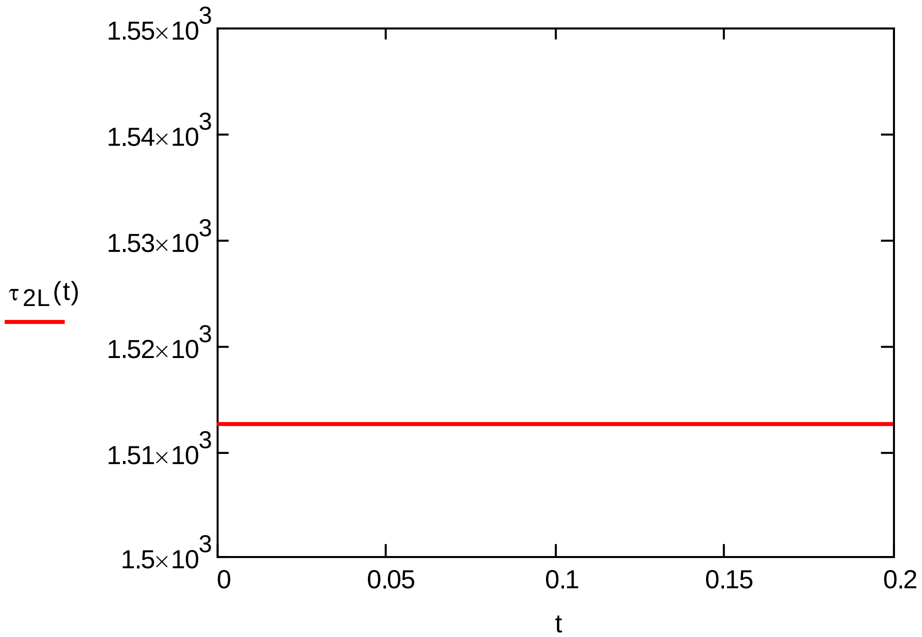
$\tau_{1L}(t) =$

243.596
243.12
241.71
239.418
236.333
232.571
228.277
223.617
218.77
213.922
209.258



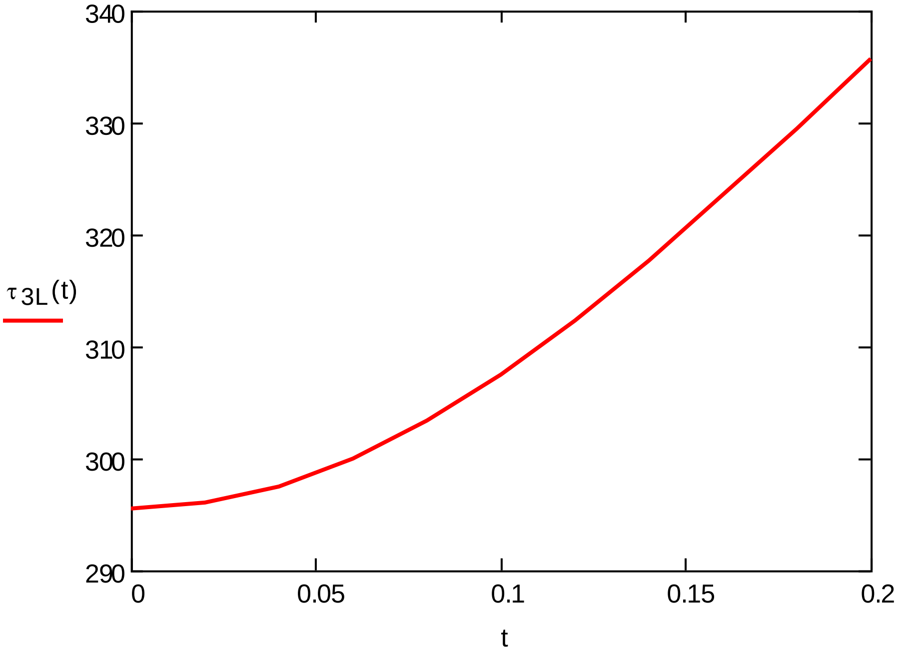
$\tau_{2L}(t) =$

$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$
$1.513 \cdot 10^3$



$\tau_{3L}(t) =$

295.551
296.063
297.582
300.063
303.43
307.583
312.402
317.757
323.506
329.509
335.633



Literatura:

Brát, V. Maticové *metody v analýze a syntéze prostorových vázaných mechanických systémů*. Praha : ACADEMIA, 1981

Čermák, T. *Elektrické pohony.* Ostrava: skriptum FE VŠB TUO, 1987

Craig, J.J. *Introduction to Robotics, Mechanics & Control*. USA: Addison-Wesley, 1986

Denavit, J.-Hartenberg, R.S. *A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices.* ASME J. Appl. Mechanics, vol.22, no. 2, pp. 215-221, June 1955

Frolov, K.V.- Voroběv, E.I. *Mechanika promyšlennych robotov, Kinematika i dinamika*. Moskva: Vysšaja škola, 1988

Kazerounian, K. *On the numerical inverse kinematics of robotic manipulators.* ASME J. Mechanisms, Transmissions, Automat. Design, vol.109, pp.8-13, Mar.1987

Luenberger, D.G. *Linear and Nonlinear Programming* .USA: Reading, MA, Addison-Wesley, 1984

Mostýn,V. Řešení inversního problému kinematiky. *Inženýrská mechanika*, č.4, 1994, s.249-256

Polak, E. Optimization – *Algorithms and Consistent Approximations*. New York: Springer-Verlag, 1997.

Reklaitis, G.V. *Engineering Optimization Methods and Applications*. New York: Wiley, 1983

Rektorys, K. *Přehled užité matematiky.* Praha: SNTL 1968

Schilling, R.J. *Fundamentals of Robotics*, Analysis and Control. USA: Prentice-Hall, Inc., 1990

Shimon,Y. *Handbook of industrial robotics.* West Lafayette, Indiana: School of Industrial Engineering, Pardue University, 1990

Taylor, R.H. *Planning and execution of straight line manipulator trajectories.* USA: IBM J. Research and Development, Vol.23, pp.424-436

Valášek, M. *Mechatronika.* Praha: Skripta ČVUT, 1996

Víteček, A. *Syntéza optimálního programového řízení metodou agregace stavových proměnných*. Ostrava: FS VŠB TUO, habilitační práce, 1991

Vukobratovič, M.-Potkonjak, V. *Scientific Fundamentals of Robotics 6, Applied Dynamics and CAD of Manipulation Robots.* New York: Springer-Verlag, 1985

Wang, L.T.-Ravani,B. *Recursive computations of kinematic and dynamic equations for mech. manipulators.* IEEE Journal of Robotics,1985 IEEE J.Robotics Automat. vol. RA-1, no.3, pp.124-131, Sept.1985

Zítek, P. a Víteček, A. *Návrh řízení podsystémů se zpožděními a nelinearitami.* Praha: Vydavatelství ČVUT, 1999, 165 stran